MÉTHODES DE RAISONNEMENT ET LEURS MODÉLISATIONS LOGIQUES. SPÉCIFICITÉ DE L'ANALYSE. QUELLES IMPLICATIONS DIDACTIQUES ?

Viviane Durand-Guerrier*, Gilbert Arsac**

ABSTRACT

We explore the question of rigour in the field of calculus along two dimensions: How can students avoid invalid proofs in the absence of explicit logical rules for mathematical reasoning, on the one hand, and what replaces the missing logical references, on the other?
To that end, we study the practise of demonstration in calculus at the beginning of university studies. This practise is based on *reasoning with a generic element*, for which natural deduction in predicate calculus provides an analytic frame. In the teacher's discourse, this mode of reasoning appears in the form of rules for manipulating variables, and we show why this is specific to calculus in contrast to geometry and algebra. Our study of teachers' commentaries on a student's error shows the prevalence of one such rule, historically explainable and existing in textbooks. The study also shows that these rules, highly contextualised, are strongly dependent on the mathematical knowledge of the field in question, which might explain why beginners have such difficulty understanding them. Modelling these rules for manipulating variables within a logical frame makes it possible to refer to coherent knowledge and to situate our inquiry with respect to previous work on deductive reasoning.

RESUMEN

Exploramos el problema del rigor en el ámbito del análisis siguiendo dos ejes: por un lado, cómo el estudiante puede prevenirse ante demostraciones no válidas cuando no se le explicitan las reglas lógicas del razonamiento mate-

---

* LIRDHIST, Université Claude Bernard Lyon1, Lyon.
vdurand@univ-lyon1.fr

** Institut Girard Desargues, Université Claude Bernard Lyon1, Lyon.
arsac@desargues.univ-lyon1.fr

Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 23, n° 3, pp. 295-342, 2003

mático y, por otro lado, por qué tipo de argumentación el profesor sustituye la lógica ausente.
Para ello hemos estudiado la práctica de la demostración en análisis al principio de los estudios universitarios. Esta práctica se basa en razonar partir de un ejemplo genérico, razonamiento que puede analizarse mediante la deducción natural del cálculo de predicados. En el discurso del profesor, este modo de razonamiento se presenta en forma de reglas de manipulación de variables y mostramos por qué constituye una especificidad del análisis respecto a la geometría y el álgebra. El estudio de las reacciones de los profesores a un error de estudiante muestra el predominio de una de estas reglas, explicable históricamente y controlable en los manuales. Nuestro estudio muestra también que estas reglas, muy contextualizadas, dependen fuertemente del conocimiento matemático del ámbito afectado, pudiéndose así explicar la dificultad de comprensión de los principiantes. El interés de la modelización lógica radica en que permite referir estas reglas de manipulación de variables a una saber coherente. Nos permite también situarnos respecto a trabajos anteriores sobre el razonamiento deductivo.

RÉSUMÉ

Nous explorons le problème de la rigueur dans le domaine de l'analyse suivant deux axes ; comment l'étudiant peut-il se prémunir contre les preuves non valides, en l'absence de toute explicitation des règles logiques relatives au raisonnement mathématique d'une part, et par quoi l'enseignant remplace-t-il la logique absente d'autre part ?
Pour cela nous étudions la pratique de la démonstration en analyse en début des études universitaires. Cette pratique se fonde sur le raisonnement à partir de l'exemple générique lequel peut s'analyser à l'aide de la déduction naturelle dans le calcul des prédicats. Dans le discours de l'enseignant, ce mode de raisonnement apparaît sous forme de règles de manipulation des variables et nous montrons pourquoi ceci constitue une spécificité de l'analyse par rapport à la géométrie et à l'algèbre. L'étude des réactions des enseignants à une erreur d'étudiant montre la prévalence d'une de ces règles, explicable historiquement et contrôlable dans les manuels. Notre étude montre aussi que ces règles, très contextualisées, sont fortement dépendantes de la connaissance mathématique du domaine concerné, ce qui peut expliquer leur difficulté d'appréhension par les débutants. L'intérêt de la modélisation logique est de permettre de référer ces règles de manipulation de variables à un savoir cohérent. Elle nous permet aussi de nous situer par rapport aux travaux antérieurs sur le raisonnement déductif.

Mots-clés : didactique des mathématiques, enseignement universitaire, raisonnement, élément générique, démonstration en analyse, règles de manipulation des variables, logique classique, calcul des prédicats, démonstration naturelle, nécessité et généralité.

D'une manière générale, dans les démonstrations mathématiques proposées aux étudiants, on trouve assez peu de références explicites à la logique classique (calcul des propositions, calcul des prédicats). A contrario, on exige de ces mêmes étudiants un certain niveau de rigueur dans les preuves qu'ils produisent, ceci afin d'en assurer la validité. Dans les travaux que nous menons, nous examinons la question de l'articulation entre logique, rigueur et validité sous deux points de vue. D'une part du côté du praticien des mathématiques dans son rôle de professeur ; *par quoi, dans son discours auprès des étudiants remplace-t-il la logique absente?* D'autre part du côté de l'étudiant en mathématiques ; *comment, en tant que novice du domaine mathématique étudié, peut-il satisfaire aux exigences de rigueur qui permettent, en principe, de se prémunir contre les preuves non valides ?* Dans l'étude qui suit, nous nous intéressons principalement à la première question en approfondissant surtout le cas de l'analyse. Nous appuierons nos réflexions sur une étude de la démonstration en analyse et de sa modélisation logique, et sur un protocole obtenu en soumettant une démonstration de topologie comportant une erreur, proposée par un étudiant, à un certain nombre d'enseignants de mathématiques.

MOTIVATIONS

En didactique des mathématiques, les travaux sur la démonstration, dont les derniers sont ceux conduits par Raymond Duval (1993, 1995), utilisent comme cadre logique de référence essentiel le calcul des propositions. Il n'est certes pas invoqué explicitement dans ce travail, mais l'étude du « pas de raisonnement », qui est au cœur de l'étude, n'est autre que celle du fonctionnement cognitif de la règle d'inférence appelée « modus ponens » ; reconnaissance du théorème pertinent, vérification des conditions d'application de ce théorème et détachement de la conclusion. La pertinence de ce cadre d'analyse s'explique, du point de vue logique, par le fait que l'on manipule, en Géométrie, essentiellement des théorèmes universels qui peuvent se mettre sous la forme ; « Pour tout x, si $P(x)$, alors $Q(x)$ ». Cependant, dans les démonstrations géométriques, en général les quantificateurs n'apparaissent pas, c'est-à-dire que l'on travaille sur un exemple générique. On n'a donc besoin que d'une instance de l'énoncé ouvert correspondant ; « Si $P(a)$, alors $Q(a)$ », où a désigne un élément générique du domaine de référence considéré. On est alors effectivement ramené au calcul des propositions. De plus, comme le remarquait déjà Pascal, la logique est superflue (Pascal, 1985). En effet, il est inutile de convoquer toute une théorie pour justifier l'emploi du seul modus ponens et du raisonnement par l'absurde. On peut donc se passer même du calcul des propositions.

Notons cependant (Durand-Guerrier, 1999), que cela conduit à des difficultés lorsque l'énoncé universellement quantifié est non pas vrai, mais faux sur le domaine considéré. Voici un exemple simple illustrant ce fait :

Soit Q un quadrilatère ; pour chacune des deux implications suivantes dire si elle est vraie ou fausse ;

a) si Q est un rectangle, alors ses diagonales ont même longueur.

b) si les diagonales de Q sont perpendiculaires, alors Q est un losange.

L'énoncé a) est vrai, car il est associé à un théorème universel ; quant à l'énoncé b), c'est une instance d'un énoncé ouvert admettant à la fois des exemples et des contre-exemples. Autrement dit, on ne peut pas se prononcer sur la valeur de vérité de cet énoncé. Le déclarer faux revient à assimiler cet énoncé à l'énoncé universellement quantifié associé. Comme le fait remarquer Houdebine (1998, page 115), cet exercice « fait apparaître chez des élèves de quatrième une hésitation entre faux, pas toujours vrai et vrai ».

Lorsqu'on aborde les démonstrations en Analyse, il apparaît très clairement que le cadre théorique proposé par Raymond Duval pour la Géométrie devient inopérant dans de nombreux cas, en particulier lorsqu'interviennent des théorèmes existentiels. Nous allons illustrer ce point à travers l'exemple d'une démonstration, erronée, du théorème des accroissements finis généralisés. Nous rappelons (tableau 1) l'énoncé de ce théorème, ainsi que celui du théorème usuel des accroissements finis.

Théorème des accroissements finis : Etant donné deux réels a et b tels que a < b et une fonction numérique f définie sur l'intervalle fermé [a ;b], si f est continue sur l'intervalle fermé [a ;b], et dérivable sur l'intervalle ouvert]a ;b[, alors il existe un réel c dans l'intervalle]a ;b[tel que $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.
Théorème des accroissement finis généralisé : Etant donné deux réels a et b tels que $a<b$ et deux fonctions numériques f et g définies et continues sur l'intervalle fermé *[a ;b],* dérivables sur l'intervalle ouvert *]a ;b[,* si la dérivée g' de la fonction g ne s'annule pas sur l'intervalle *]a ;b[*, alors il existe un réel c dans l'intervalle *]a b[,* tel que $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Tableau 1. – Théorèmes des accroissements finis

Une démonstration, fréquemment rencontrée chez les étudiants en DEUG scientifique première année, consiste à déduire le deuxième théorème du premier, de la façon suivante :

La fonction f vérifie les conditions d'application du théorème des accroissements finis, donc il existe c dans $]a\,;b[$, tel que $f'(c)(b-a)=f(b)-f(a)$. De même g vérifie les conditions d'application du théorème des accroissements finis, donc il existe c dans $]a\,;b[$, tel que $g'(c)(b-a)=g(b)-g(a)$. Comme g' ne s'annule pas sur $]a\,;b[$, $g'(c)\neq 0$ et donc $g(b)-g(a)\neq 0$. On peut donc faire le quotient des deux égalités, on obtient alors l'égalité cherchée.

Cette démonstration est fausse ; on peut le montrer sur un exemple en considérant deux fonctions pour lesquelles on ne peut pas *choisir le même point c,* ce qui n'est pas si facile d'ailleurs puisque, pour exhiber un contre-exemple, on ne peut pas considérer deux polynômes de degré inférieur ou égal à 2 ; on peut par exemple prendre les fonctions qui à x associent respectivement x^2 et x^3 ou encore x^2 et $sinx$. Si l'on analyse cette démonstration à l'aide du modèle de Raymond Duval, on est conduit à examiner son organigramme (cf. annexe 1). Celui-ci montre que les différents théorèmes, explicites ou implicites, sont utilisés correctement ; la non-validité ne dépend pas d'une mauvaise application de la règle du Modus Ponens. L'erreur peut être analysée de deux points de vue.

Dans le premier point de vue, on considère que la démonstration est, comme en géométrie une démonstration sur un exemple générique, constitué ici du couple des deux fonctions f et g (dans la démonstration du théorème usuel, on travaille sur une seule fonction f), mais qu'il faut ajouter aux considérations de Duval une règle de manipulation des variables ; quand on applique un énoncé du type « quel que soit a, il existe b… », il faut ajouter que b « dépend » de a. Dans ce premier point de vue *on étudie empiriquement les règles de fonctionnement des démonstrations concrètement mises en œuvre en mathématiques.*

Dans le deuxième point de vue, on interprète la démonstration non plus dans le cadre du calcul des propositions, mais dans celui du calcul des prédicats. Autrement dit, *on utilise un modèle théorique pour rendre compte de la pratique précédente.*

De ce point de vue, l'erreur consiste à utiliser une lettre de variable liée comme s'il s'agissait d'un nom d'objet. Ceci revient à faire l'impasse sur l'inférence sémantique associée à la règle d'instantiation existentielle, et du coup, à ne pas respecter les restrictions correspondantes sur les noms d'objets ; à savoir, qu'une lettre utilisée pour une instance d'un énoncé existentiel ne peut pas être utilisée pour désigner un autre objet. L'utilisation de cette règle permet de rectifier la démonstration précédente ; on déduit une instance pour *f* avec par exemple la lettre *r*, puis une instance pour *g* avec par exemple la lettre *s*. On peut bien alors obtenir l'égalité des deux quotients, mais ceci ne prouve pas le résultat cherché (cf. annexe 2).

Une manière d'éviter l'erreur, fréquemment rencontrée dans la classe de mathématiques, consiste à utiliser une lettre différente pour la variable liée dans chacune des deux instances de l'énoncé existentiel. Sur le plan logique, ceci n'a pas de statut théorique ; sur le plan mathématique non plus d'ailleurs, les règles de manipulation des lettres muettes en mathématiques étant analogues aux règles de manipulation de lettres de variables liées en logique. Il s'agit d'une pratique permettant, par l'utilisation d'un formalisme intermédiaire, d'attirer l'attention sur le fait que l'on ne peut pas considérer a priori qu'il s'agit du même élément pour les deux fonctions.

Nous revenons maintenant plus en détail sur ces deux points de vue qui vont nous servir de référence pour nos analyses.

PREMIER POINT DE VUE ; LA PRATIQUE DE LA DÉMONSTRATION

1) Choix du corpus

Afin d'étudier la pratique de la démonstration en analyse, et étant donné que notre objectif est didactique et non pas historique nous nous limitons aux textes mathématiques produits au XX$^{\text{ème}}$ siècle. Nous postulons de plus que lorsqu'on se place à un niveau universitaire d'enseignement de l'analyse, il n'y a pas de différence essentielle entre les publications destinées à des chercheurs et celles destinées à l'enseignement mathématique à l'université[1]. En effet, d'une part, la notion de limite qui est au cœur des exemples que nous traitons n'a pas subi un processus de transposition qui aurait complètement déformé son sens c'est-à-dire le champ des problèmes qu'elle permet de résoudre, comme c'est le cas de la notion de distance à l'époque de la réforme des mathématiques modernes (Chevallard & Joshua,1982) ; introduite historiquement dans le cadre de l'analyse réelle où sa définition, à partir de Cauchy puis de Weierstrass, se précise peu à peu à partir d'une notion préconstruite, c'est bien dans ce cadre qu'elle intervient encore au niveau

1. Nous excluons donc les textes mathématiques destinés aux ingénieurs en exercice ou en formation.

d'enseignement qui nous intéresse, c'est-à-dire à l'université. De plus, notre étude porte essentiellement sur les modes de raisonnement qui lui sont associés, et sur les définitions, domaines dans lesquels il n'y a pas de transformation par transposition en ce sens que le raisonnement espéré de l'étudiant n'est pas différent de celui du mathématicien. Bien sûr des phénomènes de transposition apparaîtraient si l'on examinait l'insertion de la définition de la limite dans une progression et la création d'un champ d'exercices ad hoc mais ce n'est pas notre propos. Ceci délimite notre corpus. Toutefois, nous utiliserons quelques textes historiques pour montrer que les mathématiciens ont précédé les étudiants dans la pratique de certaines erreurs typiques dans le domaine de l'analyse.

2) Exemple générique, nécessité et généralité

Rappelons d'abord la définition de Balacheff de l'exemple générique ;

> « L'exemple générique consiste en l'explication des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent, non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe. » (Balacheff 1988

La preuve par exemple générique concerne donc les assertions portant sur tous les éléments d'une classe, c'est-à-dire en mathématiques des propositions universellement quantifiées. On peut y distinguer deux aspects ; la *nécessité* et la *généralité*. La nécessité fait référence au caractère contraignant du raisonnement ; « est nécessaire ce qui ne peut être autrement » (Aristote, Second Analytiques[2] et Lalande, 1926). Elle est assurée par l'enchaînement sans faille du raisonnement, ce que Duval (loc. cit.) étudie dans le mécanisme du « pas de raisonnement », et facilement modélisée par le calcul des énoncés. La généralité vise à garantir le caractère générique de l'exemple étudié. Elle peut être assurée de différentes manières, relativement indépendantes de la nécessité, et dépendantes du domaine mathématique envisagé. Du point de vue du vocabulaire, on parlera aussi bien d'élément « quelconque », « arbitraire », voire même « donné »[3].

2. I-33, 88b, 30 (traduction de Jean Tricot, Editions Vrin, 1987), cité dans Durand-Guerrier, 1996, p.14.

3. Lorsque la géométrie descriptive était enseignée, et que l'on se posait le problème de la construction de l'intersection de deux surfaces, on vérifiait toujours que l'on était capable de construire un « point courant » de l'intersection, ce qui signifiait un point absolument quelconque, sans aucune particularité facilitant sa construction.

Exemple 1 ; *La géométrie.* Au témoignage de Proclus, conforté par les travaux d'historiens comme Mueller (1981) ou Netz (1999), il est clair que pour Euclide, la démonstration géométrique consiste dans l'étude d'un exemple générique (pour plus de détails, cf Netz, loc. cit. et Arsac, 1999). La question est réglée depuis si longtemps qu'elle n'est plus abordée explicitement par les mathématiciens. Elle ne transparaît qu'à travers certaines formulations, par exemple la démonstration d'un énoncé valable pour un triangle quelconque commencera par ; « Etant donné trois points non alignés, A, B et C dans un plan… », ou bien par ; « Soient A, B et C trois points non alignés dans un plan… ». Ce sont des formules classiques pour se donner un triangle quelconque, c'est-à-dire générique. Le pédagogue ajoutera à l'intention de ses élèves qu'ils doivent dessiner un triangle effectivement « quelconque », c'est-à-dire ni rectangle, ni isocèle. Cette précaution n'a pas de statut théorique, mais traduit un savoir faire issu d'une longue expérience, destiné à prévenir les erreurs. En même temps, elle permet de traduire concrètement auprès des débutants le fait que l'on traite un cas générique.

Exemple 2 ; *Le calcul littéral.* nous désignons ainsi ce qui était autrefois appelé « algèbre ». Ici, le règlement du problème de la généralité est beaucoup plus récent car il repose sur l'emploi de la notation littérale introduite par Viète. Celle-ci est tellement passée dans les mœurs qu'aucun commentaire relatif à la généralité de la démonstration n'apparaît plus dans les textes contemporains du niveau qui nous intéresse.[4] Ici encore, le pédagogue est plus explicite avec les débutants et rappelle à l'élève qu'il doit envisager un « cas général », et pour cela « calculer avec des lettres ».

Exemple 3 ; *En analyse.* Ici aussi, les démonstrations se font par traitement d'un exemple générique. La seule spécificité que nous ayons identifiée nous semble être la fréquence d'apparition d'énoncés du type ; « $\forall\varepsilon\exists\eta\ldots$ ». Nous parlerons en abrégé de démonstration en

---

4. Un problème soulevé par la notation de Viète est de savoir si le nombre représenté par une lettre est bien le même tout au long du calcul. Cette question peut faire sourire aujourd'hui, mais les débats entre mathématiciens à propos de l'axiome du choix ont fait ressortir des objections analogues *;* comment Zermelo peut-il être sûr que Zermelo pense toujours au même élément, puisqu'il ne le caractérise en rien pour lui-même *?* se demande Lebesgue, cité par Serfati (1999, p. 157). On trouvera dans cette référence une étude historique approfondie de la démonstration par exemple générique. Liouville insiste de même sur le temps du raisonnement *;* « On appelle quantité constante une variable qui pendant tout le cours d'un calcul garde la même valeur » (Liouville, 1847,p.1).

(ε,η) dont le prototype est évidemment issu de la définition de la notion de limite. Une telle démonstration part de la donnée d'un ε générique. En examinant un ensemble de manuels sur ce sujet, on s'aperçoit que le caractère générique de cet ε peut être plus ou moins souligné, et dans un vocabulaire fort varié. De plus, dans un même manuel, le traitement de cette question peut différer suivant qu'il s'agit de définir la limite d'une suite ou celle d'une fonction, alors que la structure logique des deux définitions est la même. Voici brièvement résumées les grandes tendances que l'on peut rencontrer (afin de ne pas surcharger le texte, les citations exhaustives et la bibliographie correspondante sont reportées en annexe 3, qui constitue une étude indépendante de cette question).

On peut tout d'abord distinguer au niveau des définitions deux grandes tendances ; la première consiste à donner la définition quantifiée, que ce soit en langage courant ou en utilisant les quantificateurs, par exemple :

> « Une suite (u_n) est convergente (dans R) s'il existe un réel l tel que ; $\forall\varepsilon\in R_{+*},\exists N\in \mathrm{N},\forall n\in \mathrm{N}, n\geq N\Rightarrow |u_n-l|<\varepsilon$. » (Balaguer, 1999, p. 10).

Dans ce cas, seul un commentaire ou la pratique qui apparaît dans les démonstrations qui suivent montre qu'il s'agit de preuves par exemple générique ; la donnée d'un ε quelconque remplace celle d'un triangle quelconque en géométrie. La seule différence logique avec la géométrie provient donc du fait que la quantification est toujours explicite dans l'énoncé.

La deuxième tendance consiste à expliciter d'emblée dans la définition la pratique de la démonstration sur un ε générique ; la définition est déjà une règle d'action, par exemple ;

> « Définition ; Etant donné le nombre positif arbitraire ε, on peut prouver l'existence d'un nombre positif α tel que la condition $|f(x)-l|<\varepsilon$ est vérifiée en tout point x qui vérifie $0<|x-a|<\alpha$. » (Cagnac, 1963, p. 67)

Cette idée de remplacer le *quel que soit* par l'allusion à un élément quelconque n'est pas propre aux mathématiciens. C'est ainsi que John Stuart Mill écrit ;

> " The language of ratiocination would, I think, be brought into closer agreement with the real nature of the process, if the general propositions employed in reasoning, instead of being in the form *All men are mortal*, or *Every man is mortal*, were expressed in the form *Any man is mortal* (Un homme quelconque est mortel) (cité in Lalande, 1902, article 'quelconque') ".

Nous verrons dans la suite que la modélisation logique distingue toutefois ces deux points de vue, et peut-être reflète-t-elle le fait qu'ils n'ont pas de raison d'être perçus facilement comme équivalents par les apprenants.

On trouve dans certains manuels une justification de la preuve par exemple générique par appel aux situations de débat contradictoire, par exemple ;

> « […] l'affirmation ; "*f(x)* tend vers 1 lorsque x tend vers x_0" nécessite une démonstration. Pour bien comprendre le mécanisme de celle-ci, imaginons deux personnes A et B, A faisant la démonstration sous le contrôle de B, B imposera à A certaines conditions, A dira à B comment il y satisfait, et B vérifiera les résultats obtenus par A sans s'inquiéter de la façon dont ils ont été obtenus. A cet effet, A impose à B un nombre positif, et lui demande de choisir […] De façon précise, B demande à A de lui fournir un nombre tel que…etc. » (Commeau, 1959, p. 312)

La relative rareté de ce genre de commentaire s'explique sans doute par le fait que, pour les enseignants, c'est aux explications orales pendant le cours de prendre en charge l'insistance sur le fait que ε est « donné », « imposé », qu'« on ne peut pas le choisir ». Ces commentaires qui n'ont pas de statut mathématique précis sont évités dans la plupart des manuels.

L'annexe permettra au lecteur de se rendre compte de toutes les possibilités de panachage entre ces choix. La créativité didactique qui s'exprime au niveau de ces définitions provient sans doute de la perception de leur difficulté pour les débutants. La dépendance de ε par rapport à η est soulignée soit en commentaires soit déjà dans la définition, par exemple ;

> « Un nombre b s'appelle limite d'une fonction $y=f(x)$ lorsque $x \to a$ si, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un nombre δ dépendant de ε, $\delta=\delta(\varepsilon)$, tel que pour tous les $x \in$ A satisfaisant à la condition $0<|x-a|<\delta$ on a l'inégalité $|f(x)-b|<\varepsilon$. » (Ouvarov, 1984, p. 54)

Le plus fréquent toutefois est l'introduction de la notation η_ε sans commentaire, cette notation fonctionnelle étant considérée comme impliquant évidemment la dépendance. Cette notation apparaît y compris dans des ouvrages anciens s'adressant à un public de niveau avancé comme Valiron (1942). Cette apparition montre que le danger du type d'erreur conduisant à la démonstration fausse du théorème des accroissements finis que nous avons étudiée est bien perçu par les mathématiciens. Ceci n'est pas étonnant, car ce genre d'erreur apparaît historiquement même chez un pionnier de la rigueur en analyse comme Cauchy. Celui-ci considère une suite de fonctions continues

(u_n) sur un intervalle $[x_0, X]$ et démontre le théorème suivant (nous avons ajouté les commentaires entre crochets).

Théorème ; Supposons que, les deux limites x_0, X étant des quantités finies, la série (1) u_0, $u_1, \dots u_n$, etc…soit convergente, non seulement pour $x=x_0$ et pour $x=X$, mais aussi pour toutes les valeurs de x comprises entre x_0 et X.

La série (2) $\int_{x_0}^{X} u_0(x)dx, \int_{x_0}^{X} u_1(x)dx \dots \int_{x_0}^{X} u_n(x)dx$ sera elle-même convergente ; et, si l'on appelle s la somme de la série (1), la série (2) aura pour somme l'intégrale $\int_{x_0}^{X} sdx$. En d'autres termes, l'équation (3) $s=u_0+u_1+u_3+etc$ entraînera la suivante ; (4)
$\int_{x_0}^{X} sdx = \int_{x_0}^{X} u_0dx + \int_{x_0}^{X} u_1dx + \int_{x_0}^{X} u_2dx + \int_{x_0}^{X} u_3dx + etc.$

Démonstration ; Soit $s_n = u_0 + u_1 + u_3 + \dots + u_{n-1}$ la somme des n premiers termes de la série (1), et r_n le reste à partir du nième terme. On aura (6), $s = s_n + r_n$ et l'on en conclura (7) $\int_{x_0}^{X} sdx = \int_{x_0}^{X} u_0dx + \int_{x_0}^{X} u_1dx + \int_{x_0}^{X} u_2dx + \dots + \int_{x_0}^{X} u_{n-1}dx + \int_{x_0}^{X} r_ndx.$

Or puisqu'en vertu de la formule (14) [23e leçon] l'intégrale $\int_{x_0}^{X} r_ndx$ sera une valeur particulière du produit $r_n(X-x_0)$ correspondante à une valeur de x comprise entre les limites x_0, X, [il s'agit ici de l'application de la formule de la moyenne ; $\int_{x_0}^{X} r_ndx = (X-x_0)r_n(c)$ où $x_0<c<X$] et que, dans l'hypothèse admise, ce produit deviendra nul pour des valeurs infinies de n, il est clair qu'on obtiendra l'équation (4), en posant dans la formule (7) $n=\infty$. (Cauchy, 1823, 1994, p. 157).

Ce théorème est faux ; la convergence simple de la série, qui est clairement la seule hypothèse de Cauchy, n'assure ni la convergence de la série des intégrales, ni, lorsque cette dernière converge, que l'on puisse intégrer terme à terme, c'est-à-dire que l'intégrale de la somme de la série soit la somme de la série des intégrales des termes. Il est facile d'en trouver des contre-exemples. Plusieurs étapes de la démonstration sont critiquables, mais pour ce qui nous concerne nous retiendrons particulièrement le pas de déduction suivant ; de $\int_{x_0}^{X} r_ndx = (X-x_0)r_n(c)$ (avec les notations contemporaines) Cauchy déduit que $\int_{x_0}^{X} r_ndx$ a pour limite 0 car c « est une valeur de x comprise entre les limites x_0, X ». Ici, il raisonne comme si c était une valeur « fixe », alors qu'en réalité c « dépend » de n.

La même erreur se retrouve, une vingtaine d'années plus tard, toujours dans le cours de l'école polytechnique, mais il s'agit cette fois de celui de Liouville et de la démonstration d'un théorème exact ; si une fonction a une dérivée nulle sur un intervalle fermé, elle est constante sur cet intervalle (l'analyse, beaucoup plus complexe, de cette erreur se trouve chez Arsac &Durand-Guerrier, 2000).

3) Retour sur la démonstration en géométrie

Les énoncés en (ε, η) existent bel et bien également en géométrie, mais il faut les débusquer car ils sont masqués par la pratique à peu près systématique de la quantification implicite. Par exemple l'énoncé « Tout segment admet un milieu » signifie, une fois restituée la quantification ; « Pour tout couple de points (A,B), si A≠B, il existe un point I de la droite (AB) tel que IA=IB ». Il en est de même de tout énoncé affirmant l'existence, et en général la constructibilité, d'un objet géométrique, par exemple le cercle circonscrit à un triangle, la médiatrice d'un segment, etc. Ainsi, une première différence entre géométrie et analyse tient simplement à des pratiques de rédaction des énoncés mathématiques en langue courante. Mais on peut se demander pourquoi en géométrie on ne retrouve pas d'analogue des discours sur le caractère arbitraire de la donnée initiale ni sur la dépendance de l'objet construit par rapport à la donnée. Réglons tout d'abord cette deuxième question par une réponse un peu naïve ; cette dépendance est *évidente* dans tous les exemples que nous avons donnés. Le milieu d'un segment, le cercle circonscrit à un triangle dépendent du segment, du triangle. Reste à expliquer cette « évidence ».

Une première explication, abstraite, tient au fait qu'en général l'objet construit, qui joue le rôle du η de l'analyse, est unique et donc est fonction de l'objet donné qui est lui l'analogue du.ε Bien sûr, il existe des situations où ceci est faux, par exemple étant donné (A,B) où A≠B, et $k > 0$, il existe une infinité de points M tels que $\frac{MA}{MB}=k$, mais leur ensemble qui est en général un cercle (en géométrie plane) est lui, fonction de (A,B). On se ramène donc en général, par la considération de l'ensemble des points qui vérifient la propriété envisagée (« lieu géométrique ») au cas où l'objet construit est unique[5] ou à la rigueur existe en deux ou quelques exemplaires. De plus, il n'est pas fonction n'importe comment de la donnée, mais en général constructible à la règle et au compas, ce qui explique l'absence, paradoxale au premier abord, de l'écriture fonctionnelle ; la connaissance de la procédure de construction donne une information plus précise.

---

5. Bien entendu, dans le savoir enseigné, on se limite aux cas où cet ensemble est un objet géométrique connu *;* droite, cercle, conique…

Ceci est renforcé par le dessin qui permet de représenter concrètement l'objet donné et de placer avec une précision suffisante l'objet construit en fonction de l'objet donné ; la dépendance se manifeste dans le geste qui place le milieu, qui trace les hauteurs. Si l'on trace deux segments, deux triangles, il serait tout à fait extraordinaire que leurs milieux ou leurs orthocentres se trouvent en un même point, et de plus on emploiera des notations fonctionnelles en écrivant par exemple ; deux triangles ABC et A'B'C' (ou $A_1B_1C_1$) d'orthocentres H et H' (ou H_1).

Au total, le contexte des problèmes de construction, l'usage du dessin, l'utilisation traditionnelle des notations rendent totalement invraisemblable l'oubli de la dépendance de l'objet construit par rapport à l'objet donné et donc les erreurs du type de celle de Cauchy.

Quant au problème du caractère arbitraire, générique, de la donnée, il résulte d'une longue pratique qui fait que l'on sait ce que signifie se donner un triangle quelconque, un point ou une droite quelconque, et plusieurs de ces éléments à la fois, et comment ce caractère générique se traduit sur le dessin. Là aussi, sauf chez les débutants, le problème est réglé et oublié.

De plus, la résolution d'un problème de construction géométrique se déroule suivant une démarche traditionnelle d'analyse-synthèse qui conduit à traiter d'abord de l'unicité de l'objet construit, puis de son existence. Ceci achève d'occulter la parenté logique du problème proposé avec un problème d'analyse en (ε,η). D'ailleurs les erreurs classiques associées à cette démarche, comme la confusion entre existence et unicité n'apparaissent pas dans les démonstrations sur les limites. Mais lorsque cette routine ne s'applique plus, les problèmes de raisonnement rencontrés en analyse réapparaissent, tout au moins en ce qui concerne la question du caractère générique de la donnée, nous en présentons ci-dessous deux exemples.

Exemple 1. La situation suivante est relative à la géométrie axiomatique. Elle a été observée avec des étudiants des deux premières années d'université et avec des professeurs d'enseignement secondaire, français, suisses et tunisiens. Elle consiste, après avoir présenté le contexte d'une géométrie axiomatique à la Hilbert, à énoncer les axiomes d'incidence de la géométrie plane ;

> I1**)** Etant donné deux points P et Q distincts, il existe une unique droite passant par P et Q.
>
> I2**)** Etant donné une droite, il existe au moins deux points distincts sur cette droite.
>
> I3**)** Il existe trois points non alignés.

Ensuite, après avoir précisé que, suivant la convention de Hilbert-Ackermann, on suppose que les ensembles d'objets dont on parle sont non vides (en particulier, il existe au moins une droite), on demande aux participants d'en déduire l'énoncé suivant :

> *Proposition* ; Pour toute droite, il existe au moins un point ne lui appartenant pas.

La proposition est une conséquence immédiate de l'axiome I3, mais on voit toujours apparaître la proposition de démonstration suivante ; on désigne par A, B et C les trois points non alignés dont I3 assure l'existence. Alors le point A n'appartient pas à la droite (BC), puis de même pour les deux autres côtés du triangle. Cette tentative de démonstration consiste à ne traiter que le cas des droites (AB), (BC) et (CA). Elle n'est pas toujours très convaincante pour ses auteurs eux-mêmes, elle est souvent spontanément rectifiée chez les enseignants, mais l'erreur n'est pas facile à expliciter clairement.

Exemple 2. Lakatos (1976) relate les étapes successives de la démonstration du théorème d'Euler relatif aux polyèdres (formule S-A+F=2), et les erreurs successives auxquelles elle a donné lieu. Ces erreurs peuvent souvent s'analyser comme l'incapacité à envisager un polyèdre quelconque (cf. en particulier l'incapacité de Cauchy d'imaginer un polyèdre qui ne soit pas homéomorphe à la sphère). La démarche de démonstration par exemple générique suppose que l'on connaisse les propriétés communes à l'ensemble des objets que l'on considère, autrement dit qu'on sache les caractériser « en compréhension », alors que les mathématiciens au début n'avaient qu'une connaissance intuitive, « en extension », de l'ensemble des polyèdres. Les mêmes problèmes sont intervenus dans la théorie des fonctions en lien avec le refus de certains mathématiciens d'accepter certaines fonctions comme contre-exemples (Lakatos, loc. cit.).

A notre avis ces exemples montrent que le choix d'un élément quelconque dans un contexte inhabituel est une source de difficulté même pour les enseignants rompus au choix d'un triangle, d'un point ou d'une droite quelconque en géométrie classique. Autrement dit, il ne s'agit pas uniquement d'une connaissance logique universelle, indépendante du contexte dans lequel on l'applique.

4) Conclusion sur la pratique de la démonstration

L'étude qui précède montre que dans les domaines que nous avons étudiés, la rigueur des raisonnements est assurée par des routines très contextualisées propres à chacun. C'est pour cela que nous avons dû sortir de l'étude de la seule analyse ; seule la comparaison fait apparaître les traits propres à un domaine. La logique disparaît derrière un certain nombre de « règles de raisonnement » comme celles concernant la manipulation des variables en analyse, ou les règles de raisonnement par analyse-synthèse en géométrie. En particulier, le problème de la généralité est réglé par des routines sans lien avec la logique à première vue, soit qu'il soit complètement passé sous silence, car réglé une fois pour toutes, comme dans le cas de la géométrie et du calcul littéral, soit qu'il soit absorbé comme en analyse dans des règles de manipulation des variables qui traduisent le fait que l'on travaille sur un exemple générique. Il nous semble raisonnable de supposer que cette situation est générale en mathématique, il est d'ailleurs bien connu que quand on change de domaine mathématique, il faut apprendre à raisonner dans le nouveau domaine. Ce sont ces règles ou routines dont nous conjecturons qu'elles remplacent dans la pratique et parfois le discours de l'enseignant la logique absente. Les limites de ces procédés qui permettent une évidente « économie de logique » peuvent toutefois se révéler quand les mathématiciens et surtout les élèves sont affrontés à des situations inhabituelles, comme celles que nous avons exhibées en géométrie, situations qui sont toutefois exclues en principe du savoir enseigné. L'étude de ces limites, par exemple des dangers que peut présenter l'usage de la quantification implicite, ainsi que celle des erreurs qui leur sont associées et qui sont spécifiques de chaque domaine ouvrent un champ de recherche que nous n'avons fait que défricher ci-dessus.

Nous pensons que notre analyse est suffisante pour étayer les conclusions précédentes, bien qu'elle néglige par exemple un facteur comme la prise en compte du temps ; elle devrait être complétée par une analyse diachronique de l'histoire des apprentissages dans le domaine du raisonnement chez l'étudiant. C'est parce que celui-ci est supposé être à l'aise avec l'usage des règles de raisonnement dégagées par Duval que celles-ci disparaissent de notre propos. D'ailleurs, du point de vue du contrat didactique, ce savoir n'est plus un enjeu d'apprentissage. Notons cependant que cette hypothèse n'est valable qu'en première approximation, en ce sens que par exemple même la compréhension de l'implication peut poser problème à ce niveau (Durand-Guerrier, 2003) ; toutefois nous pouvons la maintenir car aucune difficulté relative au raisonnement au sens de Duval (1995) n'apparaît dans les exemples que nous étudions dans cet article.

En revanche nous aurons à compléter notre analyse dans une deuxième direction par la prise en compte des spécificités de fonctionnement du savoir enseigné dégagées par Chevallard (1985). Si nous avons expliqué pourquoi nous négligions dans cette étude le phénomène de transposition didactique en tant que tel, il n'en reste pas moins que la notion de démonstration est ce que cet auteur appelle une notion paramathématique, c'est-à-dire une notion outil de l'activité mathématique. Ce statut d'outil ne provient pas de la transposition ; en dehors de la logique mathématique, et donc pour la grande majorité des mathématiciens, la démonstration peut être manipulée de façon experte sans aucune référence à la théorie de la démonstration ni même aucune connaissance approfondie d'aucune théorie logique. Elle est une pratique, un savoir-faire que nous avons essayé de décrire au moins dans le cas de l'analyse, de l'algèbre et de la géométrie. D'ailleurs, du point de vue historique, les théories logiques se sont construites bien après la stabilisation de la pratique de la démonstration mathématique dont elles fournissent un modèle et un outil de contrôle. Reste à examiner comment ce caractère paramathématique se manifeste au point de vue didactique.

Chevallard (loc. cit.) affirme que les objets paramathématiques sont en général préconstruits par monstration. Cet aspect nous échappe en partie, étant donné que nous n'avons pas procédé à des observations du discours de l'enseignant devant les étudiants mais nous avons montré l'existence de règles de raisonnement contextualisées susceptibles de transmission explicite et nous avons déjà étudié le sort qui leur est réservé dans les manuels ;

– en ce qui concerne le caractère générique, « donné » de ε, le phénomène marquant est la grande variété des traitements qui lui sont réservés, depuis la monstration sans commentaire jusqu'à une insistance sur le phénomène ;

– la règle de dépendance offre un exemple intéressant et sans doute assez rare d'explicitation assez unanimement partagée d'une règle de fonctionnement d'un savoir-faire.

L'existence de ces règles et leur explicitation dans les manuels montrent que l'enseignement de la démonstration ne se réduit pas à la monstration. Ceci est renforcé par le fait qu'il est évident a priori que certains enseignants universitaires maîtrisent la logique et que pour ceux là on ne saurait parler strictement de statut paramathématique pour la démonstration. Nous approfondirons l'étude de ces questions dans la suite de l'article après avoir développé l'analyse logique de la démonstration.

CALCUL DES PRÉDICATS ET DÉMONSTRATION NATURELLE

1) Syntaxe versus sémantique

La nécessité de prendre en compte le calcul des prédicats comme théorie logique de référence pour étudier les démonstrations en analyse à l'université ne fait vraisemblablement de doute pour personne ; cependant, d'une manière générale, il est admis qu'il est suffisant de connaître quelques règles syntaxiques de fonctionnement des quantificateurs pour pouvoir utiliser de manière efficace le symbolisme logique, l'exemple type concernant la négation ;

« Pour nier un énoncé quantifié, il suffit d'échanger les quantificateurs universels et existentiels, puis d'appliquer la négation à la formule sans quantificateurs. » Ainsi la négation d'un énoncé du calcul des prédicats du type « $\forall x \exists y \forall z Fxyz$ *» est l'énoncé «* $\exists x \forall y \exists z \neg Fxyz$ *».*

Cette règle syntaxique tout à fait correcte et fondamentale, et qui permet en théorie de se passer de l'un des deux quantificateurs, ne suffit cependant pas à épuiser les difficultés liées à l'usage de la négation en mathématiques. Tout d'abord, cette règle malgré sa simplicité, se heurte immédiatement à une difficulté d'usage, dès lors que l'énoncé que l'on veut nier contient, par exemple, une sous-formule quantifiée, antécédent d'un énoncé conditionnel. En effet, la négation d'un énoncé de la forme « $\forall x \forall y((\forall z Fxyz) \Rightarrow Gxy)$ » est l'énoncé « $\exists x \exists y((\forall z Fxyz) \wedge (\neg Gxy))$ », si bien que seules deux des trois quantifications ont été modifiées. En outre, à cette difficulté d'ordre syntaxique, s'ajoutent des difficultés d'ordre sémantique. Russel (1910) écrivait ; « il est facile de croire que "$\forall x \neg Fx$" est la négation de "$\forall x Fx$" ». Nous avons effectivement constaté auprès d'enseignants de collège et de lycée et de professeurs stagiaires, tant du premier degré que du second degré, l'apparition fréquente de l'énoncé *« Aucune boule n'est rouge »* comme négation de l'énoncé *« Toutes les boules sont rouges »* ; et de manière moins fréquente, mais néanmoins significative, la production de l'énoncé *« Certains triangles ne sont pas isocèles »* comme négation de l'énoncé *« Certains triangles sont isocèles ».* Ben Kilani (2001) a retrouvé les mêmes phénomènes en Tunisie. En outre, en étendant son étude auprès de quelques professeurs de français et en étudiant les programmes et les manuels de français de l'enseignement tunisien concernant la négation, il a mis en évidence le fait que ce qui est enseigné dans cette discipline, ce sont les « formes négatives » caractérisées du seul point de vue de la grammaire, c'est-à-dire de la syntaxe, indépendamment des relations entre les valeurs de vérité des énoncés proposés. On peut penser qu'il en est de même dans l'enseignement du français en France. Par exemple, dans le domaine de la géométrie, *« certains triangles ne sont pas isocèles »* est une forme négative associée à *« certains triangles sont isocèles »* ; pourtant les deux énoncés sont simultanément vrais. De même, « aucun triangle n'est isocèle » est une forme négative associée à « tous les triangles sont isocèles » ; pourtant les deux énoncés sont simultanément faux. Or, la négation en mathématique correspond au type d'opposition qui échange le vrai et le faux ; d'un énoncé et de sa négation, nécessairement l'un est vrai et l'autre faux. Elle fait donc explicitement appel au point de vue sémantique, comme le souligne déjà Aristote dans le deuxième livre de l'Organon. Ainsi, la négation logique d'un énoncé mathématique dans la langue vernaculaire fait appel simultanément à des règles syntaxiques (qui indiquent ce qu'est, dans la langue utilisée, une forme négative) et à des règles sémantiques (qui mobilisent la notion de valeur de vérité). Dans ces conditions, si l'on insiste sur le seul point de vue syntaxique, il n'est pas surprenant de voir surgir comme « négation » de *« certains triangles sont isocèles »*, aussi bien la négation mathématique *« aucun triangle n'est isocèle »*, que la phrase *« certains triangles ne sont pas isocèles »*. L'apparition dans les deux cas de la forme négative introduit une forme de parenté syntaxique qui peut masquer la différence sémantique.

Revenons à l'analyse de la démonstration en géométrie au collège faite par Duval ; dans ce cas, un point de vue essentiellement syntaxique suffit ; on peut travailler sur les statuts des propositions indépendamment de leurs valeurs de vérité en utilisant par exemple : *sous l'hypothèse A, je démontre B* ; *j'ai donc démontré $A \Rightarrow B$ (1)* ; c'est la règle d'introduction du connecteur « $\Rightarrow$ » dans la démonstration naturelle de Gentzen (1935) ; elle modélise le raisonnement hypothético-déductif. Au collège, la plupart des démonstrations en géométrie s'appuient par ailleurs sur la règle d'élimination du connecteur « $\Rightarrow$ » (ou règle du détachement) ; *$A \Rightarrow B$* ; *or A* ; *donc B (2*). L'essentiel est ici le statut des propositions ; hypothèse, conclusion intermédiaire recyclée, énoncé tiers (autrement dit théorème de la forme *$A \Rightarrow B$*) (Duval, 1995)[6].

L'avantage des procédures syntaxiques est leur relative facilité de manipulation ; la connaissance d'un petit nombre de règles et d'un répertoire de théorèmes permet de démontrer de nouveaux résultats, et ceci a priori en nombre infini, chaque nouveau théorème pouvant éventuellement enrichir le répertoire de théorèmes à disposition. Ceci conduit au collège à faire travailler les élèves à partir de la règle du détachement et d'une « boîte à outils », jouant le rôle d'une axiomatique ; ceci rend possible la mise au point de logiciels de démonstration, ce qui apparaît actuellement comme très séduisant. Les difficul-

6. Notons cependant que le plus souvent les résultats démontrés en géométrie au collège ne sont pas pointés comme tels *;* autrement dit, on démontre B sous l'hypothèse A en utilisant la règle (2) avec un certain nombre d'énoncés tiers, mais on n'énonce pas le théorème démontré.

tés commencent lorsque l'on veut démontrer qu'un résultat est faux. En effet, le fait de ne pas trouver de démonstration pour un résultat donné ne permet pas d'en déduire qu'il est faux, puisque potentiellement le nombre de démonstrations est infini. Dans le calcul des propositions, une manière de prouver qu'un théorème A est faux, c'est de trouver un énoncé B faux tel que B soit une conséquence de A. Cette règle était déjà connue de Socrate qui la recommande pour réfuter un argument. En fait, on sait bien que ce n'est pas ainsi, en général, qu'un mathématicien prouve qu'un résultat est faux ; la méthode la plus fréquente est la production d'un contre-exemple[7]. Or, la notion de contre-exemple n'a pas de signification dans le calcul des propositions, car il s'agit d'une procédure de type sémantique ; la recherche d'un contre-exemple renvoie à la nature des objets avec lesquels on travaille et à l'univers du discours dans lequel se déploie le raisonnement. La possibilité de trouver ou non un contre-exemple à un énoncé dépend donc des connaissances pertinentes pour cette recherche qui sont accessibles au sujet. Si nous pensons à une situation de classe, cela pourrait évoquer la notion de milieu objectif pour le sujet (Brousseau, 1986, Margolinas, 1995). À la suite de Morris (1938) et plus près de nous de Gardies (1994), nous parlerons ici de *niveau pragmatique*, au sens où la pragmatique prend en compte la situation d'énonciation. Da Costa (1997) quant à lui affirme la nécessité de prendre en compte les trois dimensions syntaxique, sémantique et pragmatique pour l'analyse des disciplines logico-mathématiques et précise en outre que la dimension pragmatique présuppose la dimension sémantique. Montrons comment la prise en compte de ces trois dimensions permet sur un exemple de gérer les contradictions apparentes dans les discours de certains élèves. Imaginons ainsi un élève qui affirmerait que l'énoncé *« la somme de deux carrés est un carré »* est un énoncé à la fois vrai et faux. Au niveau *syntaxique*, cela revient à affirmer simultanément un énoncé et sa négation, ce qui du point de vue de la logique classique est incohérent, et a toutes les chances d'être jugé comme tel par un

7. Dans les premiers analytiques, Aristote prouve les syllogismes concluants à partir de quatre syllogismes posés comme valides a priori et de deux règles de conversion (méthode syntaxique), et fournit un contre-exemple pour les syllogismes non valides (méthode sémantique). C'est le génie d'Aristote, d'après Largeaut (1972) que d'avoir su marier les procédés syntaxiques et sémantiques dans la théorie du syllogisme formel.

enseignant de mathématiques[8]. Cependant, le *principe de charité*[9] auquel nous invite Quine nous pousse à faire une hypothèse méthodologique de cohérence pour l'élève. La prise en compte de la dimension *sémantique* montre que ceci est possible : on pourrait en effet interpréter l'affirmation de l'élève comme signifiant *« l'énoncé est vrai pour certains couples de carrés et faux pour d'autres »*. Ce qui est le cas ici ; l'énoncé est vrai pour 3 et 4 car $3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$, et faux pour 4 et 5 car $4^2 + 5^2 = 41$, qui n'est pas le carré d'un entier[10]. La prise en compte de la situation d'énonciation (la dimension *pragmatique*) peut permettre dans certains cas de conforter ou d'invalider cette hypothèse[11].

2) La démonstration naturelle dans le calcul des prédicats

Une fois reconnue la nécessité de prendre comme théorie logique de référence le calcul des prédicats pour l'analyse des raisonnements mathématiques, on se trouve confronté à la complexité que représente la formalisation d'une preuve mathématique dans ce système. En effet, les preuves complètement formalisées s'éloignent irrémédiablement de la forme que revêtent les démonstrations mathématiques correspondantes et ne rendent pas compte des preuves par élément générique. Par contre, comme l'écrivent Cori et Lascar (1993), elles se prêtent bien à un traitement automatisé. D'une manière générale, la complexité de la formalisation des preuves mathématiques dans le langage des prédicats conduit de nombreux auteurs à estimer que ceci, quoique possible en droit, ne peut pratiquement jamais être réalisé en fait, ce qui, dans sa version extrême, conduit à penser que l'on ne peut pas contrôler logiquement la validité de la plupart des preuves mathématiques. Ceci ruinerait, en quelque sorte, le projet de Frege, et retirerait à la logique sa prétention à être une théorie de l'inférence valide. Comme c'est bien souvent le cas, cette position extrême ne rend pas justice à la réalité. De fait, à la suite des travaux de Gentzen qui a développé un système de « déduction naturelle » pour le calcul des propositions consistant à donner des règles d'introduction et

8. Notons que ce serait différent si nous étions en cours de Français en train de travailler sur la poésie.

9. Quine pose comme principe méthodologique le fait d'accorder au sujet dont on interprète les propos la cohérence a priori de ses croyances.

10. A un niveau plus avancé du cursus, on reconnaît que les couples qui satisfont l'énoncé correspondent aux triplets pythagoriciens.

11. On en trouve un exemple dans Durand-Guerrier, 1996, pp. 276-280.

d'élimination des connecteurs propositionnels, Copi (1954) et Quine (1950) ont développé un système de démonstration naturelle dans le calcul des prédicats. Aux règles de Gentzen s'ajoutent les règles d'introduction et d'élimination des quantificateurs, qui permettent en particulier de modéliser la démonstration par exemple générique. Voici comment Hottois (1989) présente ce système ;

> « Ce système offre l'intérêt de proposer des démonstrations qui restent au plus près de l'aspect familier des syllogismes. Cette présentation correspond à la volonté de formaliser et d'axiomatiser en ne rompant pas avec la rationalité discursive naturelle. »

Un tel système peut en particulier être utilisé pour contrôler localement la validité de preuves mathématiques, sans recourir à une formalisation complète dans le Calcul des Prédicats, et propose de ce fait un moyen terme entre une position formaliste extrême s'appuyant sur la théorie de la démonstration de Hilbert, inaccessible de fait, et la position inverse qui consiste à dire que les démonstrations mathématiques n'obéissent à aucune règle. Il se fixe donc un but qui n'est pas sans rapport avec l'objet de notre recherche.

Les quatre règles de manipulation des énoncés quantifiés dont on dispose dans ce système sont données dans le tableau 2 (loc. cit. pp. 101-102) ;

1) I.U.[12] Instantiation Universelle
$\dfrac{(x)fx}{fa}$
a constante individuelle quelconque substituée à x[13]
[notre commentaire ; ce qui vaut pour tous vaut pour n'importe qui]
2) G.U. Généralisation Universelle
$\dfrac{fa}{(x)fx}$
avec a, constante d'objet absolument quelconque choisie dans le domaine (de x), c'est-à-dire considérée uniquement du point de vue de son appartenance à ce domaine
[notre commentaire ; on reconnaît ici la démonstration par élément générique]

12. L'auteur utilise l'abréviation UI ; nous préférons respecter l'ordre des mots en français.

13. (x) traduit une quantification universelle, ce qu'en mathématique nous noterions ∀x.

3) G.E.Généralisation Existentielle

$$\frac{fa}{\exists x fx}$$

a constante quelconque

[notre commentaire ; exhiber un élément qui vérifie la propriété permet d'affirmer l'existence d'au moins un tel élément]

4) I.E. Instantiation existentielle

$$\frac{\exists x fx}{fw}$$

Attention à l'interprétation de w ; il s'agit d'une constante d'objet, mais dont on retient seulement qu'elle est le nom de l'un des objets qui, par hypothèse, doivent, (ou doit s'il n'y a qu'un objet de ce type) vérifier $\exists x fx$. Le plus souvent, on ne sait rien de plus, c'est-à-dire qu'on ignore l'identité précise de cet objet. c'est pour cela qu'il faut veiller à ce que le signe introduit (ici w) soit sans occurrences antérieures qui précisément le détermineraient (l'identifieraient) de façon abusive.

[notre commentaire ; affirmer l'existence d'au moins un élément qui vérifie une propriété donnée permet de considérer un tel élément]

Tableau 2. – les règles de Copi

N.B. Parmi les règles de restriction, se trouvent naturellement le respect de l'ordre d'introduction des lettres ; si une instantiation existentielle se fait après une instantiation universelle, la généralisation existentielle devra se faire avant la généralisation universelle correspondante.

Le système dû à Copi est très près de la pratique mathématique ; en particulier parce qu'il introduit les constantes d'objets ; son intérêt principal, de notre point de vue, réside dans le fait de rendre explicites les règles de manipulation des variables. Il est donc intermédiaire entre la pratique usuelle et un système entièrement formalisé. La méthode de déduction naturelle due à Quine, bien qu'utilisant des règles analogues, en diffère dans le sens où elle ne fait pas appel aux constantes d'objets ; elle utilise uniquement des lettres de variables, libres ou liées, et introduit le contrôle de la validité en imposant des restrictions sur l'ordre alphabétique des variables utilisées[14], C'est donc un système formalisé dans lequel les règles de contrôle sont syntaxiques. Parmi les quatre règles introduites par Quine, deux correspondent à des schémas conditionnels universellement valides du calcul des prédicats. Ce sont ;

14. Nous empruntons la présentation de cette méthode à Gochet & Gribomont, 1990, pp. 221-231.

I.U. associée à « $(\forall xFx) \Rightarrow Fy$ » (1)
G.E. associée à « $Fx \Rightarrow (\exists yFy)$ » (3)

Les deux autres règles

G.U. associée à « $(Fy \Rightarrow (\forall xFx)$ » (2)
I.E. associée à « $(\exists xFx) \Rightarrow Fy$ » (4)

ne sont pas associées à des schémas valides. Il est en effet trivial de trouver des contre-exemples à (2) et (4). Le fait que ces deux règles soient associées à des schémas non valides impose d'édicter des restrictions dans leur usage, restrictions que Quine (1950) formule de la manière suivante (p.218) ;

> « Les variables d'instantiation de I.E. et de G.U. doivent être différentes lors de chaque application, et la variable d'instantiation lors de chaque application doit être alphabétiquement postérieure à toutes les variables libres de la ligne générique de l'application en question »

N.B. Lors de l'application de l'une de ces règles, la ligne générique est celle qui contient un quantificateur de plus que l'autre, appelée ligne instantiée. Pour I.E. et G.E., la ligne générique précède la ligne instantiée ; *pour I.U. et G.U., c'est le contraire.*

Pour faciliter le contrôle du respect de cette règle, Quine introduit un procédé de signalisation ; pour chaque application de I.E. et de G.U. on mentionne sur la ligne déduite le nom de la variable instantiée, ce qui conduit à une nouvelle formulation des restrictions ;

> « Aucune variable ne peut être deux fois l'objet d'une signalisation et la variable signalée doit être alphabétiquement postérieure à toutes les variables libres de la ligne générique. » (loc. cit. p.219)

L'inconvénient de ces systèmes de preuve est leur appel à des métarègles, ce qui pourrait laisser peser un soupçon sur la validité des preuves ainsi construites. Fort heureusement, Quine (1950) démontre dans son propre système que toute application correcte des métarègles introduites peut être remplacée par une preuve algorithmique dans le calcul des prédicats. Ainsi, ces deux règles apparaissent comme des artifices pour abréger les démonstrations, tout en garantissant la validité de la déduction complète (Gochet & Gribomont, 1990, p.227). Cependant, comme certaines des déductions ne sont pas localement valides dans le calcul des prédicats[15], le contrôle pas à pas de la preuve ne suffit pas ici, il faut un contrôle global, contrairement à ce que l'on fait en Géométrie (cf. Duval 1993). Du point de vue épistémologique, les considérations précédentes montrent qu'il suffit

15. Puisque certains pas de la démonstration peuvent s'appuyer sur les énoncés (2) et (4) qui ne sont pas universellement valides.

de savoir transcrire une démonstration mathématique en déduction naturelle dans le système de Quine pour être assuré de l'existence d'une transcription formalisée dans le cadre théorique du calcul des prédicats. Autrement dit, la distance entre démonstration pratique et démonstration formalisée n'est peut-être pas aussi infranchissable qu'on l'affirme parfois (cf. par exemple R Hersh, 1997, p. 50) [16].

Reprenons maintenant la distinction entre les points de vue sémantique et syntaxique ; les règles d'introduction et d'élimination des quantificateurs à la manière de Copi relèvent de la dimension sémantique, puisqu'on introduit des noms d'objets, les premières lignes de la preuve ayant pour fonction d'éliminer la totalité des différents quantificateurs, retrouvant ainsi la preuve par exemple générique. On peut alors travailler comme si l'on était dans le calcul des propositions, en utilisant les règles de Gentzen. Pour terminer la preuve, il s'agit alors de restituer les quantificateurs, en tenant compte de l'ordre dans lequel ils avaient été éliminés et des règles d'introduction.

Remarquons que, de même que la logique des propositions transforme la notion de causalité en implication, les systèmes de preuve du calcul des prédicats présentés ici absorbent la notion intuitive de dépendance entre variables dans des règles d'écriture et de manipulation des quantificateurs et des variables. Or, comme nous allons le voir, le mathématicien tient à garder à l'esprit cette notion de dépendance car elle lui semble indispensable pour comprendre.

De fait, pour des raisons d'économie bien compréhensibles, dans la pratique mathématique ordinaire, les deux opérations d'élimination, puis d'introduction des quantificateurs sont le plus souvent soit absentes, soit partielles. Il en résulte une instabilité sur le statut des lettres dans les démonstrations (voir à ce propos Arsac et Durand-Guerrier, 2000). Ceci peut être bénéfique dans certains cas en permettant en particulier de calculer formellement au cours d'une démonstration, mais peut également être source d'erreur comme nous allons le montrer plus loin. Dans la perspective didactique qui est la nôtre, nous retiendrons que l'utilisation du système de Copi permet de mettre en évidence dans une démonstration certaines manipulations de variables cachées par la rédaction proposée.

16. Largeault (1972) écrit à ce propos ; « Du point de vue théorique, l'avantage des systèmes de déduction naturelle sur les systèmes de type hilbertien réside dans le fait que les démonstrations y sont plus directes (..). Enfin ces systèmes correspondent mieux à l'emploi qu'on fait de la logique dans les mathématiques courantes ; car on n'y utilise pas la logique sous forme d'axiomes logiques, mais sous forme de règles d'inférences. » (p. 57)

Nous nous proposons dans ce qui suit de montrer, sur un exemple, la pertinence, sur le plan didactique, de l'utilisation de la déduction naturelle dans le calcul des prédicats pour analyser les preuves mathématiques du point de vue de leur validité logique, et ceci principalement lorsque ces preuves mobilisent des énoncés contenant simultanément un (ou des) quantificateur(s) universel(s) et un(ou des) quantificateur(s) existentiel(s), ce qui se trouve être le cas de très nombreux énoncés en analyse.

EXPÉRIMENTATION

1) Problématique et dispositif expérimental

L'expérimentation que nous allons décrire tente d'apporter des éléments de réponse à notre première question ; *« Par quoi, dans son discours auprès des étudiants, l'enseignant remplace-t-il la logique absente ? »*. Pour cela, nous avons soumis à des enseignants une démonstration de topologie produite par un étudiant et comportant une erreur que nous interprétons comme relevant d'un problème de manipulation de variables. Nous nous intéressons à l'interprétation de l'erreur par les enseignants et aux commentaires qu'ils se proposent d'adresser à l'étudiant.

2) Présentation du protocole et première analyse

La démonstration sur laquelle nous allons travailler (tableau 3) a été proposée par un étudiant considéré comme brillant par le professeur destinataire. Nous avons ajouté la numérotation des lignes pour faciliter les renvois au texte. A part cela, la rédaction est exactement celle de l'étudiant. On notera qu'il raisonne par l'absurde sans le dire en partant en fait de l'hypothèse d (A, B) = 0.

Question ; (E,d) est un espace métrique, A et B sont deux parties de E. On définit $d(A,B) = \inf\{d(x,y),\ x\in A,\ y\in B\}$. Montrer que si A est compact et B est fermé et $A\cap B=\varnothing$, alors $d(A,B)\neq 0$.
Démonstration ;
1 $\forall \varepsilon>0,\ \exists x\in A,\ \exists y \in B,\ 0\leq d(x,y) < \frac{\varepsilon}{2}$.
2 Comme $x \in A$, et A fermé $\Rightarrow x\in \overline{A} \Rightarrow \exists\ (x_n) \subset A,\ x_n \to x$
3 Or, $d(x_n,y)\leq d(x_n,x)+d(x,y)$
4 Et, comme $x_n \to x,\ \exists\ n_0,\ n\geq n_0\ d(x_n,x)< \frac{\varepsilon}{2}$
5 d'où, pour $n\geq n_0$, $d(x_n,y)<\varepsilon$, ainsi $x_n \to y$ et comme $(x_n) \subset A$, alors :
6 $y \in \overline{A}=A$, or $y \in B \Rightarrow y \in A\cap B \Rightarrow A\cap B\neq\varnothing$.

Tableau 3. – Le texte de la démonstration de l'étudiant

Il s'agissait d'un devoir à la maison et l'étudiant a soumis cette démonstration, conscient d'avoir démontré un résultat avec des hypothèses plus faibles que celles indiquées (A et B fermés, au lieu de A compact et B fermé). En commentaire, le professeur concerné écrit ;

> « A première vue, je n'ai pas vu l'erreur mais en reprenant la démonstration je me suis rendu compte que (x_n) dépend de ε de départ ! On a donc $d(x^{\varepsilon}_n,y^{\varepsilon}) < \varepsilon/2$, mais si on prend un $\varepsilon'>0$, on ne peut avoir $d(x_n,y) < \varepsilon'$. Je pense que le problème relève d'un abus de langage ; on devrait dire ; $\forall\varepsilon>0\ \exists x_\varepsilon\in A,\ \exists y_\varepsilon\in B\ 0 \leq d(x_\varepsilon,y_\varepsilon) < \varepsilon/2$. »

Notons qu'il n'y a pour l'enseignant aucun doute sur le fait que la démonstration comporte une erreur ; en effet, a priori, il sait que les hypothèses indiquées dans l'exercice sont minimales. Autrement dit, c'est le savoir mathématique qui lui permet de disqualifier la démonstration proposée par l'étudiant. Ceci dit, il va de soi que cela ne suffit pas aux yeux de l'enseignant et le commentaire proposé concerne la recherche de l'erreur dans la démonstration. L'enseignant relève que *l'étudiant n'a pas vu que x dépend du ε de départ.* L'erreur est analysée, comme nous l'avons conjecturé, en référence à une règle de manipulation des variables dont nous avons mis en évidence l'importance en analyse. Ici, il faut successivement l'appliquer à (1), *x* dépend de *ε, puis à (2), (x_n)* dépend de *x*, pour en déduire que (x_n) dépend de ε[17]. De plus, l'enseignant fait référence à la notation η_ε, ce qui fait qu'il classe l'erreur comme un « abus de langage ».

Pour une analyse logique de cette erreur, nous pouvons utiliser les règles de Copi présentées plus haut. Leur application au cas qui nous intéresse montre qu'il manque trois instantiations successives de l'énoncé (1) : de l'énoncé ; $\forall\varepsilon>0\ \exists x\in A\,\exists y\in B(0\leq d(x,y)<\varepsilon/2)$ (1), on peut inférer par la règle d'Instantiation Universelle (I.U.) :

$$\exists x\in A\,\exists y\in B(0\leq d(x,y)<\varepsilon/2)\ (2)$$

où ε est une lettre de constante, sans restriction (un élément générique du domaine de référence, ici R^{+*}, dont nous ne changeons pas le nom, conformément à la pratique des mathématiciens, ce que ne ferait pas un logicien). De cet énoncé, on peut inférer en appliquant deux fois la règle d'Instantiation Existentielle (I.E.),

$$0\leq d(x,y)<\varepsilon/2\ (3)$$

où cette fois *x* et *y* sont des lettres de constantes soumises aux restrictions de la règle d'instantiation existentielle. Rappelons qu'en

---

17. On utilise ici la transitivité de la relation « dépendre de », évidente du point de vue langagier, même si sa définition mathématique est floue.

logique, on choisirait des lettres différentes pour les variables et les noms d'objet ; on pourrait écrire, par exemple, $0 \leq d(a,b) < c/2$ (4).

De cette manière, après avoir introduit la suite convergeant vers x, on aboutit à la ligne 5 à l'énoncé ;

$\forall n > n_0, (d(x_n, b) < c)$ (5).

En appliquant alors la règle de généralisation existentielle (G.E.), on obtient ;

$\exists y \in B \exists x \in A^N (\forall n > n_0,\ d(x_n, y) < c)$ (6),

puis par la règle de généralisation universelle (G.U.) ;

$\forall \varepsilon > 0 \exists y \in B \exists x \in A^N (\forall n > n_0,\ d(x_n, y) < \varepsilon)$ (7).

Or l'énoncé (7) ne traduit évidemment pas le fait qu'il existe une suite de A convergeant vers un point de B, si bien que l'erreur de l'étudiant provient d'une conclusion illégitime ; la lecture qu'il fait de ce qu'il a écrit à la ligne 5 le conduit à restituer les quantificateurs absents sans contrôler l'ordre dans lequel ces quantificateurs doivent être écrits.

Dans ses commentaires en direction de l'étudiant, un des enseignants à qui nous avons soumis la démonstration écrit ; *« (l'étudiant) confond le fait qu'une propriété est vraie pour un " ε fixé " et " quel que soit ε " »*. Or la méthode classique de démonstration associée à G.U., l'exemple générique, légitime dans de nombreux cas, consiste bien à démontrer « pour un *a* fixé » et à affirmer ensuite que le résultat ne dépend pas en fait du choix de *a*. Autrement dit, ce commentaire laisse dans l'ombre la difficulté spécifique de cette démonstration proposée par l'étudiant, à savoir qu'on ne peut pas appliquer G.U. sans précaution dans ce cas.

Revenons à la démonstration de l'étudiant ; on peut la formaliser en désignant par une lettre de prédicat, par exemple F, la propriété sur la distance de *x* à *y*.

L'énoncé de la ligne n°1 est de la forme

(1) ∀z∃x∃yFxyz

On applique I.U.

(2) ∃x∃yFxyt

On applique deux fois I.E.

(3) ∃yFuyt u

(4) Fuvt v

u et v sont deux variables libres obtenues par une instantiation existentielle ; elles sont donc introduites dans l'ordre alphabétique et signalées sur la ligne instantiée.

Après quelques transformations mathématiques on arrive à

(5) Guvt

(où G désigne la propriété ad hoc). Comme t est antérieur alphabétiquement à u et v, on ne peut pas faire une instantiation universelle sur t ; autrement dit la déduction :

(6) $\forall$zGuvz

est incorrecte.

3) Le point de vue des enseignants

En relation avec nos préoccupations de recherche, la démonstration de cet étudiant et les commentaires de l'enseignant nous ont paru mériter une exploration plus importante, ce qui nous a conduit à mettre en place une enquête auprès de collègues enseignant à l'université, à qui nous avons soumis les questions suivantes :

1) Quelles erreurs comporte cette démonstration, (vous pouvez supposer que vous l'expliquez à un collègue) ? 2) Qu'écririez-vous sur la copie ? 3) Quel corrigé proposeriez-vous à cet étudiant *?*

Tableau 4. – les questions posées aux enseignants

Dans les premiers questionnaires, la formulation de la première question était la suivante ; « Quelles erreurs, *sans s'attarder aux abus de notation de l'étudiant qui ont été reproduits*, comporte cette démonstration *?* (vous pouvez supposer que vous l'expliquez à un collègue). » Plusieurs collègues nous ont fait remarquer qu'il était difficile de se tenir à cette consigne compte tenu de ce qu'a écrit l'étudiant, aussi nous avons supprimé la partie de la phrase en italique.

Nous avons obtenu vingt-deux réponses d'enseignants de mathématiques en poste dans diverses universités scientifiques ; Grenoble, Lille, Lyon, Montpellier, Paris, Rouen. Plusieurs réponses sont très détaillées, d'autres sont un peu plus elliptiques. Nous proposons une première étude qualitative des réponses permettant de dégager quelques grandes tendances dans le discours des enseignants, et aussi de pointer des différences.

a) Le contrôle par les connaissances mathématiques ; *la production d'un contre-exemple*

Tous les enseignants repèrent que le résultat étant faux, la démonstration ne saurait être correcte. Quatorze d'entre eux proposent un contre-exemple ; pour une minorité, c'est le premier argument proposé à l'étudiant. C'est en effet un moyen de s'assurer de la non validité du résultat établi. Mais ceci ne permet pas de savoir en quoi la démonstration est fautive. Il est remarquable de constater que certains enseignants disent n'avoir pas détecté, à la première lecture, d'erreur dans la démonstration. Ceci confirme la faible distance, en ce qui concerne le contrôle logique de la démonstration, entre la pratique experte et celle de l'étudiant, et met en évidence que ce sont les connaissances mathématiques des enseignants (et non pas l'analyse de la démonstration) et leur pratique de la démonstration en analyse qui leur donnent d'abord la certitude d'une erreur de raisonnement et les orientent ensuite vers le problème de la dépendance des variables. On comprend mieux alors le fait que l'étudiant, ne disposant pas de ce contrôle, puisse ne pas voir son erreur.

On peut bien sûr s'interroger sur le conseil donné par l'un d'entre eux ; *« quand on n'est pas sûr, il faut expliciter la dépendance »* ; n'est-ce-pas précisément un des problèmes de nombreux étudiants de n'être jamais très sûrs des démonstrations qu'ils produisent ?

b) La prégnance de la notion de dépendance

Tous les collègues, sauf un, (soit 21) écrivent que « x et y dépendent de ε » et douze d'entre eux le traduisent en introduisant la notation $x_\varepsilon y_\varepsilon$ ou la notation y^ε[18]. Pour certains collègues, cette notation indicée apparaît comme un « canon » mathématique. On peut lire par exemple (réponse à la première question) ;

> « à la ligne 1, x et y qui dépendent de ε ne sont pas indicés par ε ; c'est un abus classique, souvent pratique ».

Pour d'autres collègues, les indices fonctionnent plutôt comme un *garde-fou* ; on peut lire dans quelques réponses à la question 2 (à l'adresse de l'étudiant)

> « mettre des indices quand on n'est pas sûr de soi. »
>
> « x et y dépendent de ε, une notation comme x_ε évite de l'oublier. »
> « le dérapage fondamental est là, quand on oublie d'écrire $x = x_\varepsilon$, $y = y_\varepsilon$ »

Certains collègues utilisent une notation de type fonctionnel (question 2):

> « précise $x(\varepsilon)$, $y(\varepsilon)$ » et plus loin, « $\exists n_0(x; \varepsilon)$ »
> « Il faut garder en mémoire les paramètres dont dépendent les quantités qu'on manipule ; c'est en écrivant $h(\varepsilon,x_0)$, $h(\varepsilon)$ qu'on peut comprendre la différence entre continuité simple et continuité uniforme. »

Les réponses recueillies confirment que la règle qui consiste à indicer les lettres de variables muettes dans une quantification existentielle lorsque celle-ci est précédée d'une quantification universelle fonction-

18. On ne peut évidemment pas en conclure que seuls ces douze collègues traduisent, en général, cette dépendance par cette notation.

ne comme une *règle de raisonnement* en Analyse, permettant à la fois d'éviter les erreurs et de mettre en évidence le « sens », ici la « dépendance des variables ». Si on prend au pied de la lettre la notation proposée comme une notation fonctionnelle, alors ceci revient à assumer implicitement l'axiome du choix (sauf cas particuliers où on pourrait effectivement déterminer une telle fonction). D'ailleurs, la démonstration classique de la continuité qui utilise une suite construite en posant *« $\varepsilon = 1/n$ »* utilise implicitement l'axiome du choix dénombrable. On peut penser cependant que pour certains collègues, cette notation vise avant tout à rappeler, par le symbolisme, le fait que x_ε « dépend » de ε, en un sens *vague*, qui est d'ailleurs exprimé dans un vocabulaire varié, comme le montre le relevé ci-dessous établi à partir des réponses des enseignants obtenues ;

> « Il faut pouvoir prendre ε et le faire varier : » (q_3)[19] versus « pour ε,x fixés » sur la copie
> « ligne 5 on " voyait " que si on changeait de ε, on changeait de y_ε. » (q_2)
> « si on veut faire tendre ε vers 0, y_ε n'est pas fixé. »
> « à la ligne 1, x et y qui dépendent de ε ne sont pas indicés par ε. »
> « (...) elle émousse notre vigilance sur la variabilité de x et de y. »
> « (...) une famille de suites ($x_{n\varepsilon}$) qui accompagne une famille de (y_ε) »
> « il faudrait montrer qu'étant donné un réel quelconque, indépendant de tout choix antérieur, à partir d'un certain rang la distance à y d'un terme de la suite est inférieur à ce réel. »
> « Attention, pour chaque ε > 0 fixé, x et y dépendent de ε. » (q_2)
> « ceci n'a été montré que pour " le " ε fixé au départ » (q_2)
> « Attention, x se déplace avec ε ; si tu fixes x , ε est fixé également. »
> « x et y sont fonction de ε (surtout y) »
> « dans 5, le y étant fonction de ε,on n'a pas ; $(x_n) \to y$ » (q_1)
> « expliquer que y est fonction du choix de ε. » (q_2)
> « si on se réfère à la ligne 1, pour avoir un x (et un y), il aurait fallu commencer par fixer un ε. »
> « il faut garder en mémoire les paramètres dont dépendent les quantités qu'on manipule. »
> « il faut acquérir l'intuition des moments où on piétine et de ceux où on avance réellement quand on cherche un exercice, et se souvenir qu'un raisonnement mathématique est un voyage qui ne peut pas s'achever quand est resté à la case départ »
> « son *x* dépend de ε ; lorsqu'il fixe *x*, le ε est fixé. »
> « dès que *n* dépasse le temps $N(\varepsilon/2)$... »
> « *x* et *y* dépendent de ε ! Aussi son *x* bouge avec ε; »

---

19. q_1,q_2 et q_3 désignent respectivement les questions 1, 2 et 3 que nous avons posées aux enseignants.

Le vocabulaire utilisé est assez varié et imagé : on fait varier, ou au contraire on fixe ; on change ; il apparaît des termes liés à l'idée de déplacement ; on accompagne, on fait un voyage ; il y a les interventions du temps (du raisonnement) ; la notion de mouvement ; tout bouge. Comme on pouvait s'y attendre apparaissent donc des images, des métaphores, des analogies. Pour certains collègues, cela semble remplacer le contrôle par les outils logiques ou symboliques qui sont peu mobilisés. D'autres collègues font référence explicitement aux deux modes de contrôles.

Contrairement aux positions largement partagées que nous venons de rapporter concernant la règle de dépendance de variables, la mise en relation des erreurs de l'étudiant avec des règles formelles de manipulation des variables et des quantificateurs fait apparaître de très grandes différences entre les enseignants. En ce qui concerne les quantificateurs deux collègues parlent d'une *mauvaise gestion des quantificateurs*, tandis que quelques collègues proposent de contrôler ce qui a été démontré en réécrivant formellement la phrase avec les quantificateurs (il s'agit donc ici d'un contrôle de type global sur les écritures symboliques) ; deux collègues quant à eux proscrivent au contraire tout emploi des quantificateurs et recommandent l'usage de la langue courante. En ce qui concerne les variables, à lire les commentaires de la plupart des collègues, il semble que dans la phrase quantifiée, les lettres renvoient implicitement à des objets du domaine considéré ; ceci n'est cependant pas partagé par tous. En effet, quelques (rares) collègues pensent que, comme les lettres qui suivent un quantificateur sont muettes et ne désignent par conséquent aucun objet, les objets que l'on manipule doivent être introduits explicitement au moyen d'*identificateurs* à l'aide de lettres qui les désignent. Cette position est à rapprocher des règles de manipulation des variables de Copi évoquées plus haut. Cette exigence d'introduction des identificateurs s'oppose à une pratique largement répandue qui consiste à ne pas distinguer entre variable liée (lettre muette) et constante individuelle d'objets (paramètre) ; le changement de statut logique des lettres dans les démonstrations est en effet le plus souvent passé sous silence[20]. Cette question est en général considérée comme trop difficile pour être abordée. C'est par exemple la position de Glaeser; dans cet ouvrage destiné aux futurs enseignants de mathématiques il consacre un chapitre à la logique dans lequel il aborde le calcul des propositions et le calcul des prédicats. Concernant ce dernier, il écrit :

---

20. Cf. Arsac et Durand-Guerrier, 1999.

> « Cela [la formalisation de la grammaire du langage des prédicats] nécessite un grand effort d'analyse que nous ne pouvons pas entreprendre dans cet ouvrage ; les règles de substitution sont très subtiles et font intervenir des distinctions entre variables libres et symboles individuels. » (Glaeser 1973)

Cette question n'est donc pas traitée dans l'ouvrage. D'une manière générale, cet aspect est peu abordé dans les éléments de logique proposés aux étudiants des premiers cycles universitaires. Notons cependant qu'il faut ici se garder de généraliser ; en effet dans certaines démonstrations, les objets, ou certains objets, sont introduits explicitement et parfois les deux modes d'exposition cohabitent comme nous allons le voir au paragraphe suivant.

APERÇUS DANS DEUX MANUELS

Compte tenu de l'importance de la règle de dépendance des variables, d'une part dans le discours des enseignants ayant répondu à notre enquête, d'autre part dans les manuels, il nous a paru nécessaire d'examiner dans un manuel de topologie, domaine dans lequel se situe la démonstration que nous avons étudiée, si l'on pouvait mettre en évidence des conditions dans lesquelles cette règle apparaît, ou au contraire n'apparaît pas. Le manuel que nous avons choisi, en raison de sa large diffusion, est le cours de Topologie de Choquet, dans son édition de 1984. Nous avons retenu trois démonstrations permettant d'illustrer la variabilité, à l'intérieur d'un même manuel, des pratiques concernant l'explicitation de la règle de dépendance. Avant de présenter ces démonstrations, nous allons montrer sur un exemple pris dans un manuel beaucoup plus récent que les règles de manipulation des variables peuvent être passées complètement sous silence[21].

1) Une démonstration « elliptique »

La démonstration qui nous intéresse ici se trouve dans Houzel, 1996, p.27. Il s'agit de démonter la proposition suivante ;

> *Soient f et g des fonctions numériques définies dans une partie A de R et a un élément adhérent à A* ; *si f(t) et g(t) ont des limites respectives h et k lorsque t tend vers a en restant dans A, alors f(t)+ g(t) tend vers la limite h + k.*

---

21. Nous remercions Faiza Chelloughi de nous avoir signalé cette démonstration.

La démonstration proposée est la suivante ;

> « Par hypothèse, quel que soit $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que $t \in A$ et $|t-a|\leq\eta$ impliquent $|f(t) - h| \leq \varepsilon$ et $|g(t) - k| \leq \varepsilon$; on a alors $|f(t) + g(t) - (h + k)| = |f(t) - h + g(t) - k| \leq |f(t) - h| + |g(t) - k| \leq 2\varepsilon$ »

Le raccourci qui est utilisé et donne lieu à la première affirmation peut s'interpréter comme l'affirmation suivante :

> sachant que
> « quel que soit $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que $t \in A$ et $|t-a| \leq\eta$ impliquent $|f(t) - h| \leq \varepsilon$ » (1) et
> « quel que soit $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que $t \in A$ et $|t-a| \leq\eta$ impliquent $|g(t) - k| \leq \varepsilon$ » (2),
> on déduit ;
> « quel que soit $\varepsilon> 0$, il existe $\eta> 0$ tel que $t\in$ A et $|t-\alpha| \leq\eta$ impliquent $|f(t) - h| \leq \varepsilon$ et $|g(t) - k| \leq \varepsilon$. » (3)

Dans ce cas précis, l'énoncé (3) est vrai ; cependant, ce n'est pas une conséquence logique de (1) et (2). En effet, il est facile de vérifier que l'inférence

> « Pour tout *x*, il existe *y*, *Fxy* » et « Pour tout *x*, il existe *y*, *Gxy* »,
> donc « Pour tout *x*, il existe *y*, *Fxy* et *Gxy* »

n'est pas valide ; autrement dit, que la formule :

> « $((\forall x\exists yFxy) \wedge (\forall x\ \exists yGxy) \Rightarrow \forall x\exists y(Fxy\wedge Gxy))$ » (4)

n'est pas universellement valide. Si l'utilisation d'un tel raccourci n'est pas un problème pour un mathématicien professionnel, il n'en va pas de même dans un manuel destiné à des étudiants. En effet, la démonstration erronée du théorème des accroissements finis généralisés présentée plus haut peut s'interpréter comme une application de cette pseudo-règle dans un cas où elle n'est pas valide. Pour légitimer l'application qui en est faite ici, on peut faire appel à une formule universellement valide obtenue en rajoutant aux deux prémisses de l'implication (4) ci-dessus, les trois prémisses ci-dessous ;

> $\forall x\ \forall t\ ((\exists y\ (Fxy\wedge Rty)) \Rightarrow Fxt)$
> $\forall x\ \forall t\ ((\exists y\ (Gxy\wedge Rty)) \Rightarrow Gxt)$
> $\forall z\ \forall t\ (Rty \vee Ryt)$.

La validité universelle de cette formule peut s'établir avec la démonstration naturelle de Copi[22]. Les trois prémisses ci-dessus sont bien vérifiées dans le cas qui nous intéresse grâce aux propriétés de la relation d'ordre. Les deux premières formalisent le fait que s'il existe un réel vérifiant la condition, alors tout réel inférieur à celui-ci la

22. La démonstration se trouve en annexe.

vérifie également[23] ; la troisième prémisse s'interprète par le fait que l'ordre considéré est un ordre total. Notons que nous utilisons deux prémisses analogues afin de traduire le fait que le réel η dont nous affirmons l'existence dépend non seulement de ε, mais aussi de la fonction considérée. Le nombre et la nature des pas de la démonstration du résultat ci-dessus suggèrent qu'il y a beaucoup de choses cachées dans la démonstration proposée par l'auteur. De fait, les différentes étapes de la démonstration logique correspondent à ce que l'on devrait écrire dans une démonstration mathématique par élément générique qui ne ferait pas l'économie du contrôle de *« l'existence d'un η pour un ε choisi arbitrairement. »*

2) Trois démonstrations de topologie

Les trois démonstrations reproduites (tableaux 5, 6 et 7) illustrent la variabilité, chez un même auteur, en l'occurrence Choquet, de l'apparition d'indicateurs permettant de rappeler la règle de dépendance des variables dont nous avons vu l'importance.

> **Proposition 13-13**. - Dire que E est localement connexe équivaut à dire que pour tout ouvert w de E, les composantes connexes de w sont ouvertes.
>
> **Démonstration**. - 1° Soit E localement connexe ; soit w un ouvert de E, et soit C une composante connexe de w.
>
> Pour tout $x \in C$, il existe un voisinage connexe V de x contenu dans w ; on a évidemment $V \subset C$, donc C est un voisinage de x. Comme C est voisinage de chacun de ses points, il est ouvert.
>
> 2° Inversement, supposons que toute composante connexe de tout ouvert de E soit ouverte. Pour tout $x \in E$, et pour tout voisinage V de x, la composante connexe C de V qui contient x est ouverte ; donc C est le voisinage de x contenu dans V que nous cherchions. (Choquet, 1984, p. 49)

Tableau 5. – première démonstration extraite de Choquet 1984

Dans la première partie de la démonstration, les lettres E, w et C sont introduites comme des constantes d'objets génériques ; si on prouve le résultat pour de tels objets, on pourra en déduire le théorème (c'est l'application implicite de G.U.) La troisième ligne de la démonstration est un énoncé clos de la forme *« $\forall x \exists V F(xVCw)$ »* ; x et V sont donc des variables liées. A la quatrième ligne, les lettres V et x ont changé de statut logique et sont manifestement des lettres de constantes d'objets ; notons que rien, dans la notation, ne vient rappeler que *« V*

23. Autrement dit, étant donnés deux réels x et t, s'il existe y tel que y vérifie la condition et t est inférieur à y, alors t vérifie la condition.

dépend de *x »* ; mais ici, cet *oubli* n'est pas dangereux, car *V* n'est qu'une variable intermédiaire permettant de démontrer un propriété de *C* ; on peut illustrer ceci à l'aide d'une modélisation de la preuve à la manière de Quine ;

(1) $\forall x \exists V F x V C w$
(2) $\exists V F t V C w$
(3) $F t u C w$ (*u* instantie *V*)
(4) $G t C$
(5) $\forall x G x C$

Dans la transformation mathématique qui permet de passer de (3) à (4), la variable instantiée à partir de l'énoncé existentiel (2) a *disparu,* absorbée dans la définition mathématique correspondante. Par conséquent, on ne risque pas de la quantifier à mauvais escient. Cela nous le voyons a posteriori ; celui qui rédige la démonstration le sait a priori. Qu'en est-il de l'étudiant qui étudie le cours ?

Quant à la phrase « *C* est voisinage de chacun de ses points », elle joue à la fois le rôle de (4) et de (5) ; dans un mouvement inverse, *x* passe du statut de nom d'objet générique, à celui de variable liée. On retrouve le même phénomène dans la deuxième partie de la démonstration.

On peut comparer cette démonstration avec le début de la démonstration ci-dessous qui se trouve un peu plus loin dans le même ouvrage

Théorème 18-4. - Toute application continue f d'un espace métrique compact E dans un autre espace métrique F est uniformément continue. *Première démonstration*.[24] - Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue on peut, à tout $x \in E$, associer un voisinage ouvert w_x, tel que l'oscillation de f sur w_x soit $\leq \varepsilon$. Soit p le nombre associé à la famille des w_x d'après le lemme 18-1. Toute boule $B(y,p)$ de E est contenue dans au moins un w_x ; donc sur cette boule, l'oscillation de f est $\leq \varepsilon$; ceci démontre la continuité uniforme de f. (loc. cit. p.75)

Tableau 6. – deuxième démonstration extraite de Choquet 1984

Comparons les deux phrases suivantes:

> *Pour tout $x \in C$, il existe un voisinage connexe V de x contenu dans w.*
> *A tout $x \in E$, (on peut) associer un voisinage ouvert w_x tel que l'oscillation de f sur w_x soit $\leq \varepsilon$.*

Elles ont la même structure syntaxique, mais on voit apparaître une différence de traitement concernant la « dépendance » de la deuxième

24. L'auteur donne deux démonstrations de ce théorème.

lettre de variable sur la première. Dans le cas de la deuxième démonstration, c'est parce qu'on a besoin de la famille des w_X que l'on marque l'indexation et que l'on remplace « il existe » par « on peut associer » ; en d'autre termes x va varier pendant le temps du raisonnement.

Dans la démonstration suivante, toujours tirée du même ouvrage, on voit apparaître une « dépendance » qui semble relever plutôt du principe de précaution ;

> Dans ce qui suit on note X un ensemble quelconque, Y et un espace métrique muni d'une distance d, et $F(X,Y)$ l'ensemble des applications de X dans Y. Cet ensemble est muni d'un écart noté également d défini de la manière suivante ;
> soient f et g deux applications de X dans Y, $d(f,g = sup_{x \in X}\, d(f(x),g(x))$
> **Théorème 22-5.** - Lorsque l'espace métrique Y est complet, $F(X,Y)$ est aussi complet.
> *Démonstration* - Soit (f_n) une suite de Cauchy de $F(X,Y)$. Pour tout $x \in X$, l'inégalité $d(f_p(x), (f_q(x)) \leq d(f_p, f_q)$ montre que la suite $(f_n(x))$ de points de Y est une suite de Cauchy. Comme Y est complet, elle possède une limite que nous noterons $f(x)$.
> Or f_n étant une suite de Cauchy, pour tout $\varepsilon>0$ il existe un entier $n(\varepsilon)$ tel que, pour tous p et $q \geq n(\varepsilon)$, et pour tout $x \in X$, on ait : $d(f_p(x),f_q(x)) \leq \varepsilon$
> Si dans cette inégalité on laisse x et p fixes et que $q \to \infty$, $f_q(x)$ tend vers $f(x)$, et on obtient l'inégalité ; $d(f_p(x),f(x)) \leq \varepsilon$ pour tout $\geq n(\varepsilon)$
> Il résulte de cette inégalité que $d(f_p,f) \leq \varepsilon$, donc la suite f_n converge vers f dans l'espace $F(X,Y)$ muni de l'écart d.
> Donc cet espace est bien complet. (loc. cit. p.92)

Tableau 7. – troisième démonstration extraite de Choquet 1984

Dans cet exemple, on voit apparaître explicitement une notation de type fonctionnel sous la forme $n(\varepsilon)$; on peut penser qu'ici on veut insister plus sur le fait que l'entier n introduit *ne dépend pas de x*, que sur le fait qu'il dépend de ε. D'autre part, on retrouve les changements subreptices de statut logique pour les lettres x, p et q ; x et p sont *fixés provisoirement dans le temps du raisonnement*.[25] Enfin, le théorème qui permet de justifier la substitution de f à f_q dans l'inégalité n'est pas explicité ; ce qui peut laisser croire qu'une telle substitution va de soi, or précisément, il y a ici des manipulations de lettres qui en d'autres circonstances pourraient être *dangereuses*.

Ces trois démonstrations mettent en évidence la grande variabilité de traitement des écritures quantifiées à l'intérieur d'un même manuel.

---

25. On trouve ceci explicité chez Liouville dans le cours de calcul Différentiel de l'Ecole Polytechnique (Editions Ellipses).

Dans d'autres démonstrations de l'ouvrage apparaissent plusieurs niveaux d'indices dans des énoncés existentiels. Il n'est pas facile de déterminer ce qui pilote les choix de l'auteur quant aux notations utilisées. On peut légitimement se demander comment un lecteur novice peut faire la différence entre les situations où telle pratique peut conduire à une démonstration erronée, alors qu'elle sera acceptable dans d'autres cas. Notre étude montre que *la règle de raisonnement* consistant à marquer la dépendance n'a pas un caractère de généralité absolue. D'ailleurs, si on voulait l'appliquer en toute généralité, il faudrait par exemple écrire que dans le théorème des accroissements finis, le « c » dépend de f, de a et de b et donc le noter $c_{f,a,b}$! Cependant, l'expert va utiliser cette notation lorsqu'il sait qu'il y a un risque de « dérapage ». En d'autres termes, l'expert choisit le niveau de rigueur qu'il s'impose dans un cours ou dans un manuel, non seulement en tenant compte du niveau d'évolution de la théorie qu'il expose, et du public auquel il s'adresse, mais également en s'appuyant sur ses connaissances du domaine, ce dernier point n'étant a priori pas partagé par celui qui s'adonne à l'étude.

CONCLUSION

Notre travail partait de deux questions :

Du côté du professeur ; par quoi, dans son discours auprès des étudiants remplace-t-il la logique absente *?*

Du côté de l'étudiant: comment, en tant que novice du domaine mathématique étudié, peut-il satisfaire aux exigences de rigueur qui permettent, en principe, de se prémunir contre les preuves non valides?

En ce qui concerne la première, nous avons obtenu des éléments de réponse assez précis ; le professeur communique des règles de raisonnement contextualisées qui remplacent l'appel explicite à la logique. La règle de dépendance des variables dans les énoncés en (ε, η) est exemplaire de ce point de vue. Toutefois, elle présente en même temps un caractère exceptionnel, d'une part par l'unanimité de son emploi par les enseignants, d'autre part par la fréquence de son explicitation dans les manuels. Nous avons vu que ces phénomènes peuvent s'expliquer par des raisons historiques ; les mathématiciens eux-mêmes ont commis des erreurs à ce propos. Dans le même domaine mathématique, les règles de raisonnement qui expriment le caractère générique d'un epsilon sont beaucoup plus rarement explicitées dans les manuels. Nous faisons l'hypothèse, à contrôler, que cette explicitation existe en général, mais au niveau du discours oral de l'enseignant. Plus généralement, on peut conjecturer que ces règles de raisonnement, considérées comme des savoir-faire, voire des trucs pédagogiques pas très nobles, en particulier les règles de manipulation des variables, font l'objet d'une transmission essentiellement orale, voire implicite, sur le mode du « faites comme moi ». Ceci est renforcé par le fait que beaucoup de ces règles peuvent être considérées comme « évidentes », car justifiables à l'aide d'arguments de bon sens, tirés des modes courants d'argumentation, ainsi qu'on peut le voir quand on considère le problème de la généricité, donc du caractère arbitraire, donné, du epsilon ; ceci peut être considéré comme relevant d'une règle du débat avec un adversaire. Nous avons relevé aussi que sur d'autres aspects, des pratiques très variables d'un enseignant à l'autre coexistent ; il en est ainsi par exemple de tout ce qui concerne la syntaxe de l'usage des quantificateurs et des variables qui ne fait nullement l'objet d'un consensus. L'ensemble de ces remarques corrobore le fait que ces règles de raisonnement relèvent d'un savoir-faire qui n'est pas constitué en savoir théorique, et qui ne possède pas en particulier de frontières franches. Tous ces éléments caractérisent probablement les notions paramathématiques « intrinsèques », c'est-à-dire qui présentent déjà ce caractère pour l'expert.

Pour répondre à cette première question, nous avons dû analyser la pratique de la démonstration en analyse et plus largement en mathématiques. Cette étude est loin d'être complète, même dans le domaine de l'analyse, mais nous permet de nous situer par rapport au travail de Duval.

a) en synchronie ; Duval analyse les formes de raisonnement associées au calcul des propositions, au premier chef le pas de raisonnement, c'est-à-dire la règle du détachement. Ce type de raisonnement demeure un substrat commun que l'on retrouve partout mais qui peut passer complètement au second plan dans des cas où le raisonnement se fonde essentiellement sur le calcul (où les pas de raisonnement sont automatisés) et sur les règles de manipulation des variables, ce qui peut être le cas en algèbre et en analyse. En outre il ne permet de rendre compte que de l'aspect de nécessité du raisonnement, non de l'aspect de généralité.

b) en diachronie ; l'apprentissage du pas de raisonnement à l'occasion des démonstrations géométriques se situe au niveau du collège[26] en France, alors que nous étudions principalement le raisonnement en analyse dont l'apprentissage se situe beaucoup plus tard, au niveau de l'université ou juste avant. Tout comme la pratique

26. junior high school, scuola media.

du calcul littéral, les apprentissages envisagés par Duval sont considérés comme acquis ; le raisonnement, au sens qu'il définit, intervient toujours, mais il est réputé ne plus poser de problème, c'est une deuxième raison pour qu'il passe au second plan.

L'exemple du théorème des accroissements finis généralisés met en évidence ce double aspect ; l'organigramme de la démonstration montre que le raisonnement tel que l'analyse Duval en constitue l'armature, mais une analyse plus précise montre qu'il ne rend pas compte de la règle de dépendance des variables, or c'est sur ce point précis qu'apparaissent principalement les erreurs des étudiants.

Les analyses précédentes, tout en montrant le caractère très contextualisé des règles de raisonnement, montrent aussi combien elles sont imbriquées avec le savoir mathématique ; c'est lui qui détermine par exemple quand une situation est suffisamment dangereuse pour que l'on doive faire appel à la notation indiciée pour indiquer la dépendance d'une variable par rapport à une autre. Il nous apparaît actuellement difficile de déterminer une liste exhaustive des conditions dans lesquelles cette notation apparaît systématiquement, tout comme il serait difficile de déterminer dans quelles conditions l'usage de la quantification implicite des énoncés conditionnels doit être remis en question. D'une manière générale, la bonne application de ces règles repose sur l'expertise mathématique de l'acteur. Ceci montre qu'une compétence qui semble relever du protomathématique est en fait largement contrôlée par le savoir mathématique.

Ceci peut nous servir de transition pour aborder la deuxième question (comment l'étudiant peut-il s'approprier les règles ?) car les considérations précédentes indiquent déjà pourquoi cette appropriation sera difficile ; elle suppose apparemment l'expertise mathématique. On se heurte donc ici à une sorte de cercle vicieux.

Ici la logique peut nous venir en aide, sous l'espèce de la théorie de la « déduction naturelle dans le calcul des prédicats » dont nous avons vu qu'elle permet de modéliser la démonstration mathématique, car elle rend compte du raisonnement par exemple générique. L'apport de cette théorie se réalise dans deux directions :

a) pour l'enseignant ou le didacticien, elle permet d'une part de comprendre que les règles de manipulation des variables peuvent être référées à un savoir cohérent, et ne constituent pas seulement un ensemble disparate de savoir-faire. Cet « ennoblissement » fait de leur apprentissage un objet à considérer autrement que comme un aspect d'une *cuisine pédagogique*. Plus sérieusement, cette théorie permet une analyse des démonstrations et le repérage systématique des difficultés probables. Elle enrichit donc l'analyse a priori, comme on peut le constater sur l'exemple de la démonstration de topologie fournie par un étudiant que nous avons analysée au §4.2. Ce travail d'explicitation sur les variables et la quantification permet même dans certains cas d'approfondir la connaissance mathématique en jeu.

b) Pour l'étudiant, nous conjecturons qu'il est possible, à partir de cette connaissance, de mettre sur pied un enseignement plus systématique des règles de raisonnement qui concernent la manipulation des variables, en allant au-delà des quelques notions actuellement transmises sur les quantificateurs et les règles syntaxiques de négation. Pour cela, la notion de satisfaction d'une phrase ouverte par un élément et la démonstration naturelle de Copi sont, a priori, des points d'appui pertinents. En effet, ils permettent de prendre en compte de manière explicite l'articulation entre les aspects syntaxique et sémantique qui est au cœur de l'activité mathématique dès lors que l'on se propose de tirer partie des avantages du formalisme liés à ses propriétés opératoires, l'aspect *syntaxique*, sans renoncer pour autant aux intérêts d'un contrôle par la signification, l'aspect *sémantique*. Toutefois, notre étude montre qu'un tel enseignement ne peut pas être séparé du travail sur le contenu mathématique lui-même ; il ne s'agit pas d'une propédeutique mathématique.

RÉFÉRENCES

ARSAC G. (1999), Variations et variables de la démonstration géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques. 19(3)* 357-390.

ARSAC G., DURAND-GUERRIER V. (1999), Démonstration et quantification existentielle in Bailleul,M. (Ed.) *Actes de la X° Ecole d'été de Didactique des Mathématiques*. IUFM Académie de Caen.

ARSAC G., DURAND-GUERRIER V. (2000), Logique et raisonnement mathématiques. Variabilité des exigences de rigueur dans les démonstrations mettant en jeu des énoncés existentiels in ASSUDE T., GRUGEON B. (Ed *) Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques* (pp 55-83), IREM de Paris VII.

BALACHEFF N., 1988, *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège*, Thèse d'Etat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

BALAGUER B. (1999), *La leçon d'analyse au CAPES de mathématiques. Paris* ; Ellipses.

BEN KILANI I. (2001), *Les conceptions des élèves de la sixième année de l'enseignement secondaire tunisien à propos de la négation des énoncés quantifiés*, mémoire de DEA de didactique des disciplines, option mathématiques, ISFEC, Université de Tunis.

BOURDIEU P. (1980), *Le sens pratique*. Editions de Minuit.

BROUSSEAU G. (1986), Fondements et méthodes de la Didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques.*7(2) 33-115.

CAUCHY A. (1823), *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal, quarantième leçon*, Debure, Paris, réimpression Ellipses, Paris, 1994, p. 157.
CHEVALLARD Y. (1985) *La transposition didactique(1991)*. Grenoble ; la Pensée Sauvage.
CHEVALLARD, Y., JOSHUA M.A (1982) Un exemple d'analyse de la transposition didactique – la notion de distance, *Recherches en Didactique des Mathématiques.*3(2) 157-239, repris in CHEVALLARD Y. (1991) 125-198.
CHOQUET G. (1984), *Cours de Topologie*. Masson.
COMMEAU J. (1959), *Algèbre et trigonométrie*. Paris ; Masson.
COPI I. (1954), *Symbolic Logic*. NewYork.
CORI R., LASCAR D. (1993), *Logique mathématique, cours et exercices*. Tome 1. Paris ; Masson.
COSTA N.C.A., DA (1997), *Logiques classiques et non classiques* ; *essai sur les fondements de la logique*. Paris ; Masson.
DURAND-GUERRIER V. (1996), *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication.* Thèse. Université Claude Bernard Lyon 1.
DURAND-GUERRIER V. (1999), L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit X n°50* (57-79). IREM de Grenoble.
DURAND-GUERRIER V. (2003) Which notion of implication is the right one ? From logical consderations to a didactic perspective, *Educational Studies in Mathematics*. 53(1) 5-34.
DUVAL R., EGRET M.A. (1993), Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif. *Repère n°12* (pp.114-140). Topiques Editions.
DUVAL R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*. Bern ; Peter lang.
GARDIES J.L. (1994), *Les fondements sémantiques du discours naturel*. Paris ; Vrin.
GENTZEN G.(1935), Untersuchungen über das logische Schliessen in *Math. Zeitschr*.,39. Traduction française ; *Recherche sur la déduction logique*. PUF 1955.
GLAESER G. (1973), *Mathématiques pour l'élève professeur.* Paris ; Hermann.
GOCHET P., GRIBOMONT P. (1990), *Logique. Méthodes pour l'informatique fondamentale*. *Vol. 1*. Hermès.
GRANGER G.G. (1994), *Formes, opérations, objets*. Paris ; Vrin.
HOTTOIS G. (1989), *Penser la logique.* De Boeck Université.
HERSH R. (1997), *What is mathematics, really*. Oxford.
HOUDEBINE J. (1998), *La démonstration. Ecrire des démonstrations au Collège et au Lycée.* Hachette Education.
HOUZEL C. (1996) *Analyse mathématique. Cours et exercices* (p.27). Paris ; Belin.
LAKATOS I., (1976), *Proofs and réfutations*, traduction française par N. BALACHEFF ET J.M.LABORDE ; *Preuves et réfutations* (1984) Paris ; Hermann.
LALANDE A, 1902, *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*, Presses Universitaires de France, Paris, tome 2.
LARGEAULT J. (1972) *Logique mathématique, textes*. Paris ; Armand Colin
LIOUVILLE J.,*Calcul différentiel. Cours de l'Ecole Polytechnique 1847-1848*. Ellipses.

MARGOLINAS C. (1995), La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. *Les débats de didactique des mathématiques*. Grenoble ; la Pensée Sauvage.

MORRIS C. (1938), *Foundations of the theory of signs*, Chicago ; Chicago University Press, cité in Hottois G. (1997), *De la renaissance à la post-modernité* (p.258). Bruxelles ; De Boeck Université.

MUELLER I. (1981) *Philosophy of mathematics and deductive structures in Euclid's Elements*. Cambridge (Masasuchets).

NETZ R. (1999), *The shaping of deduction in greek mathematics, a study in cognitive history,* Cambridge.

OUVAROV, (1984), *Analyse mathématique*, Editions de Moscou, traduction française, MIR, 1988.

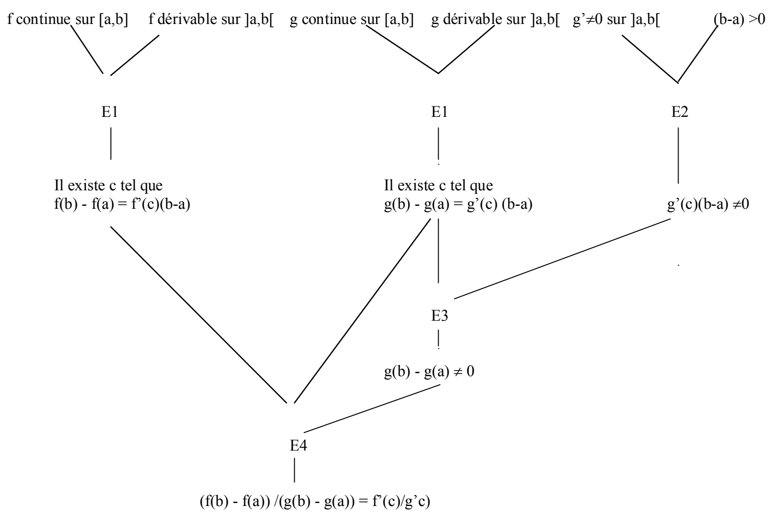
PASCAL *De l'Esprit Géométrique,* réédité par A. Clair, 1985 ; Flammarion.

QUINE W.V.O. (1950), *Methods of logic*. Holy, Rinehart & Winston. Traduction française ; *Méthodes de logique*. Armand Colin. 1972.

RUSSEL B. (1910), *Principia Mathematica* traduction française in *Russell, écrits de logique philosophique* (p.241*),* 1989, PARIS ; PUF.

SERFATI M. (1999), La dialectique de l'indéterminé, de Viète à Russell. In *La recherche de la vérité*. ACL-Les éditions du Kangourou.

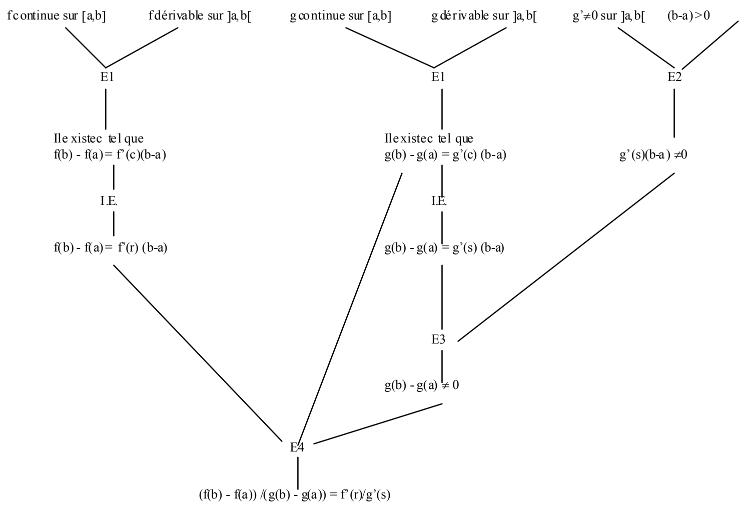
ANNEXE 1. - DIAGRAMME DE LA DÉMONSTRATION ERRONÉE DU THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS GÉNÉRALISÉS



E1 Théorème des accroissements finis
E2 produit de deux réels non nuls
E3 propriété de l'égalité
E4 propriété sur les quotients

Identification de l'énoncé existentiel avec une instance sans changement de lettre.
Pratique mathématique ; *choisir une lettre de variable différente dans les deux énoncés existentiels*
Point de vue logique ; *écrire deux instances avec des lettres différentes (cf. Annexe 2)*

ANNEXE 2. - DIAGRAMME DE L'ANNEXE 1 COMPLÉTÉ
PAR LES INSTANTIATIONS EXISTENTIELLES



E1 Théorème des accroissements finis
E2 produit de deux réels non nuls
E3 propriété de l'égalité
E4 propriété sur les égalités de quotients
I.E. instantiation existentielle

ANNEXE 3. - DIFFÉRENTES PRÉSENTATIONS DE LA NOTION DE LIMITE

Nous présentons ici un échantillon de définitions de la limite d'une fonction ou d'une suite en commentant brièvement chacune d'elle suivant la classification que nous avons dégagée dans l'article ; définition au sens propre, règle d'action, mise en évidence du caractère générique de ε, dépendance de η par rapport à ε etc. L'échantillon n'est pas représentatif au sens statistique, mais permet de mettre en évidence la variété des choix possibles.

Définition 1 :

> Si (u_n) est une suite réelle, un réel λ est appelé limite de la suite (u_n) (quand n $\rightarrow \infty$) si et seulement si , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in$ N tel que $|u_n - \lambda| \leq \varepsilon$ dès que $n \geq N$.
>
> Premier usage ; (unicité) ; $\varepsilon > 0$ étant donné arbitraire, choisissons $n \in$ N pour que $|u_n - \lambda| \leq \varepsilon$ …(Arnaudiès JM., Fraysse H., 1988, p. 32).

Dans cet exemple, la définition est quantifiée, sauf en ce qui concerne n où la quantification est implicite, mais dès la première application, le caractère générique de ε est mis en évidence avec la redondance entre « étant donné » et « arbitraire ».

Définition 2 :

> A tout nombre $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre un nombre $\eta > 0$ tel que l'inégalité $|x - x_0| < \eta$ entraîne l'inégalité $|f(x) - l| < \varepsilon$, ou en abrégé ;
>
> $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\{|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\}$
>
> (Hocquenghem, 1962, p. 7)

A nouveau, on retrouve une définition quantifiée, sauf pour la variable x ; l'idée que η dépend de ε apparaît en filigrane (on peut faire *correspondre*), mêlée à l'allusion à une règle d'action.

Définition 3 :

> […] quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$ il existe un entier naturel N tel que $|u_n - a| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. (Aribaud, 1987, p. 126)
>
> Pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ dès que $x \in I$ et $|x - c| < \delta$ (Aribaud, 1987 p. 164).

On trouve ici dans le même ouvrage, une définition entièrement quantifiée pour la limite d'une suite, et mixte pour la limite d'une fonction, en ce sens que figure « on peut trouver » qui renvoie plutôt à l'action, et que le quantificateur sur x a disparu.

Définition 4 :

> If, when any positive number δ, however small, is assigned, we can choose $y_0(\delta)$ so that, for all values of y different from zero but numerically less than or equal to $y_0(\delta)$, $\phi(y)$ differs from l by less than δ, then we can say that $\phi(y)$ tends to the limit l as y tends to 0, and write $\lim_{y\to 0}\phi(y)=l$. (Hardy, 1908, p. 175).

Ici l'aspect règle d'action est dominant et la notation $y_0(\delta)$ apparaît.

Définition 5 :

> Etant donné le nombre positif arbitraire ε, on peut prouver l'existence d'un nombre positif α tel que la condition $|f(x)-l|<\varepsilon$ est vérifiée en tout point x qui vérifie $0<|x-a|<\alpha$. (Cagnac, 1963, p. 67)

Une définition « condensée » est ensuite donnée ;

> $\forall\varepsilon>0, \exists\alpha>0$ tel que $\{x\in C$ et $\{0<|x-a|<\alpha\}\Rightarrow|f(x)-l<\varepsilon|\ \}$ (p. 67)

Les commentaires suivants introduisent au raisonnement par exemple générique :

> La démonstration du fait que f(x) a pour limite un nombre connu l quand x tend vers a pose un problème d'existence comportant une donnée ε (nombre positif) et une inconnue α (nombre positif). (p. 69).
> Le changement de statut de ε quand on sait que f a effectivement une limite est marqué ; choisissons ε=h (p. 68)

On voit ici que la définition quantifiée est présentée comme un condensé de la définition par règle d'action et lui est donc équivalente. Mais les commentaires soulignent l'aspect générique de ε tout en précisant que lorsque la limite est connue, on peut choisir ε, ce qui est rarement mis en relief.

Définition 6 :

> Soit u une suite réelle. Soit l un réel.
>
> On dit que u admet l pour limite si,pour tout ε de R^{+*}, il existe un naturel N tel que,quel que soit le naturel n,
>
> si n>N, alors $|l-u_n|<\varepsilon$.
>
> […] De façon imagée, il faut considérer « qu'on » nous impose un certain ε, sans bienveillance particulière, et que nous n'avons aucun droit sur cet ε ; il faut nous en accommoder et trouver un entier N qui lui convienne. (Haug, 2000, p. 79).

Voici un exemple de définition quantifiée suivie d'une justification du caractère arbitraire de ε par l'appel à un interlocuteur imaginaire. Notons que le commentaire précédent est repris sous une forme voisine à propos de la limite d'une fonction (p. 107-108) ; le nombre ε *est* *un nombre absolument quelconque dont nous savons seulement que c'est un réel strictement positif.*

L'idée de l'appel à un interlocuteur imaginaire pour justifier des règles de manipulation des variables dans un contexte analogue n'est pas nouvelle. Voici l'article exhaustion dû à d'Alembert, dans la grande Encyclopédie.

> **EXHAUSTION,** s. f. *terme de Mathématiques.* La méthode d'*exhaustion* est une manière de prouver l'égalité de deux grandeurs, en faisant voir que leur différence est plus petite qu'aucune grandeur assignable ; & en employant, pour le démontrer, la réduction à l'absurde.
> Ce n'est pourtant pas parce que l'on y réduit à l'absurde, que l'on a donné à cette méthode le nom de *méthode d'exhaustion* ; mais comme l'on s'en sert pour démontrer qu'il existe un rapport d'égalité entre deux grandeurs, lorsqu'on ne peut pas le prouver directement, on se restraint à faire voir qu'en supposant l'une plus grande ou plus petite que l'autre, on tombe dans une absurdité évidente ; afin d'y parvenir, on permet à ceux qui nient l'égalité supposée, de déterminer une différence à volonté ; & on leur démontre que la différence qui existerait entre ces grandeurs (en cas qu'il y en eût) serait plus petite que la différence assignée. (Encyclopédie, article exhaustion).

RÉFÉRENCES DE L'ANNEXE 3

ARIBAUD F., VAUTHIER J. (1987), Mathématiques, première année de DEUG, algèbre-analyse, Paris ; Eska.

ARNAUDIES JM., FRAYSSE H. (1988), Cours de mathématiques, tome 2, Paris ; Dunod.

CAGNAC G., RAMIS E., COMMEAU J. (1963), NOUVEAU COURS DE MATHEMATIQUES SPECIALES, TOME 2, ANALYSE. PARIS ; MASSON.

HARDY (1908), A course of pure mathematics, Cambridge University Press, dixième édition, 1952.

HAUG P-J. (2000), Mathématiques pour l'étudiant scientifique, tome 1. Paris ; EDP Sciences.

HOCQUENGHEM A., JAFFARD P. (1962), Mathématiques, tome I. Paris ; Masson.

VALIRON G. (1942), Théorie des fonctions. Paris ; Masson, deuxième edition, 1955.

ANNEXE 4. - DÉMONSTRATION DU RÉSULTAT DU PARAGRAPHE 5.1 A LA MANIÈRE DE COPI

$(\forall x\exists yFxy) \wedge (\forall x\exists yGxy)$ (1)	prémisse
$\forall x\forall t((\exists y(Fxy\wedge Rty)) \Rightarrow Fxt)$ (2)	prémisse
$\forall x\forall t((\exists y(Gxy\wedge(Rty)) \Rightarrow Gxt)$ (3)	prémisse
$\forall y\forall t(Rty\vee Ryt)$ (4)	prémisse
$(\forall x\exists yFxy)$ (5)	séparation sur (1)
$(\forall x\exists yGxy)$ (6)	séparation sur (1)
$\exists yFay$ (7)	I.U. sur (5)
$\exists yGay$ (8)	I.U. sur (6)
Fau (9)	I.E. sur (7)
Gaw (10)	I.E. sur (8)
$Rwu\vee Ruw$ (11)	I.U. sur (4) avec u et w
[Rwu (12)	prémisse auxiliaire
$Fau\wedge Rwu$ (13)	conjonction sur (9)&(12)
$\exists$ y $(Fay\wedge Rwy)$ (14)	G.E. sur (13)
$\forall t$ $((\exists y\ (Fay\wedge Rty)) \Rightarrow Fat)$ (15)	I.U. sur (2) avec a
$(\exists y\ (Fay)\wedge\ (Rwy)) \Rightarrow Faw$ (16)I.U. sur (15)avec w	
Faw (17)	M . P. sur (14)& (16)
$Faw\wedge Gaw$ (18)	conjonction sur (10)&(17)
$\exists y\ (Fay\wedge Gay)$ (19)	G.E. sur (18)
$\forall x\ \exists y\ (Fxy\wedge Gxy)$ (20)]	G.U. sur (19)
$Rwu \Rightarrow (\forall x\exists y(Fxy\wedge Gxy))$ (21)	introduction de $\Rightarrow$
$Ruw \Rightarrow (\forall x\exists y(Fxy\wedge Gxy))$ (22)	démonstration analogue

avec introduction de Ruw en échangeant les rôles de u et w.

$(Rwu\vee Ruw) \wedge (Rwu \Rightarrow (\forall x\exists y(Fxy\wedge Gxy)))$
$\wedge\ (Ruw \Rightarrow (\forall x\exists y(Fxy\wedge Gxy)))$ (23) conjonction sur (11), (21) et (22)

$\forall x\exists y(Fxy\ \wedge Gxy))$ (24) disjonction des cas*

Nous avons ainsi établi que (24) est une conséquence logique de la conjonction des prémisses (1), (2) (3) et (4).

* $((p\vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge (q\Rightarrow r))\Rightarrow r$ est un énoncé universellement valide du calcul des prédicats ; comme (23) est une instance vraie de la prémisse de l'implication, on peut déduire la vérité de l'instance de la conclusion correspondante, c'est-à-dire (24).